

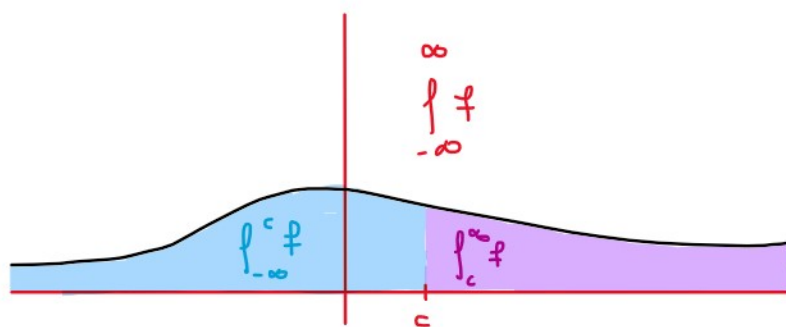
Integrales impropias especiales y dudas

jueves, 9 de junio de 2022

Definición.

1) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cualquier intervalo cerrado contenido en $\mathbb{R}$, definimos la integral impropia

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx.\end{aligned}$$



Diremos que esta integral impropia converge si las dos integrales impropias convergen, en caso contrario diremos que diverge.

2) Si $f: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cualquier intervalo cerrado contenido en (a, ∞) y f no está acotada en a , definimos la integral impropia

$$\begin{aligned}\int_a^{\infty} f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{d \rightarrow a^+} \int_d^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, \infty)\end{aligned}$$

Diremos que esta integral impropia converge si las dos integrales impropias convergen, en caso contrario diremos que diverge.

3) Si $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en cualquier intervalo cerrado contenido en (a, b) y f no está acotada en a y en b , definimos la integral impropia

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{d \rightarrow a^+} \int_d^c f(x) dx + \lim_{e \rightarrow b^-} \int_c^e f(x) dx, \quad c \in (a, b). \end{aligned}$$

Decimos que esta integral impropia converge si las dos integrales impropias convergen, en caso contrario decimos que diverge.

Observación. La convergencia de estas integrales impropias no dependen del punto c .

Dem. Tarea.

Ejercicio. Calcular $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Sol. Definimos $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, y notemos que f es continua en $(-1, 1)$ y no está acotada en -1 y 1 . Entonces

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 0 \in (-1, 1)$$

$$= \lim_{a \rightarrow -1^+} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow -1^+} [\arcsen x] \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow 1^-} [\arcsen x] \Big|_0^b$$

$$= \lim_{a \rightarrow -1^+} [\cancel{\arcsen}(0) - \arcsen(a)]$$

$$+ \lim_{b \rightarrow 1^-} [\arcsen(b) - \cancel{\arcsen(0)}]$$

$$= -(\arcsen(-1)) + \arcsen(1)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

Ejercicio 6. Demuestra que la serie de Taylor de $f(x) = \log(1+x)$ alrededor de $a=0$ converge a $\log(x+1)$ si $x \in (-1, 1]$.

$$\text{Recordemos que } R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$$

$$\text{P.D. } \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,0}(x) = 0$$

• ¿Cómo probar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1000 \cdot x} = 0$?

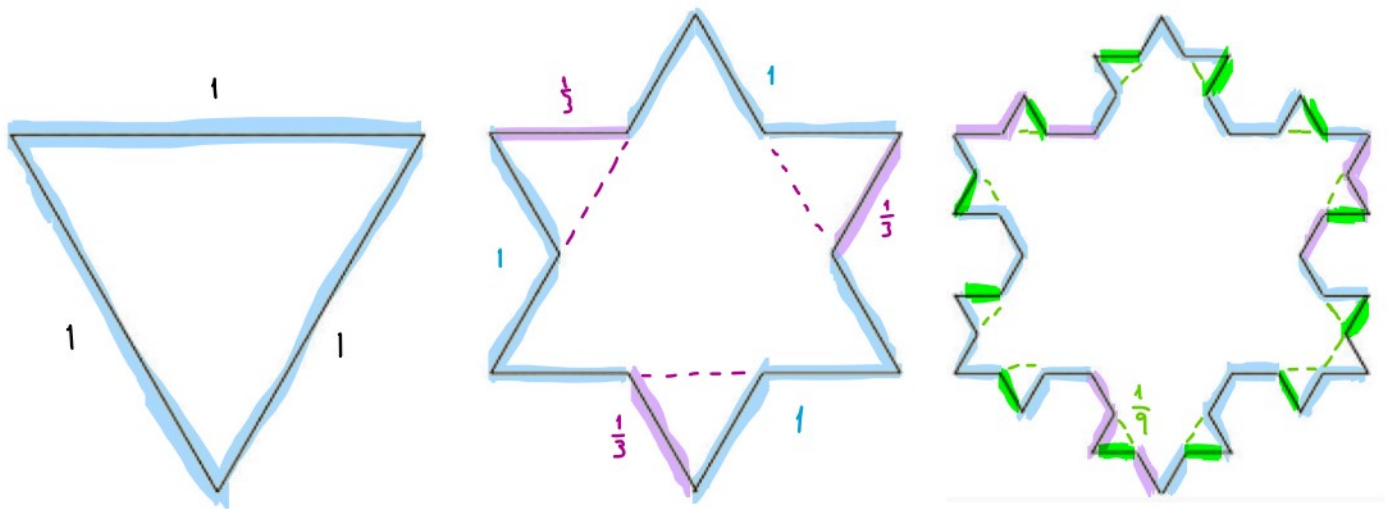
Ya sabemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Como el límite existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1000x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1000} \right) \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{1000} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$$

En general, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} c f(x) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Ejercicio 8.

"Perímetro"



Perímetro del paso 1:

$$P_1 = 3$$

Perímetro paso 2

$$P_2 = 3 + 3 \left(\frac{1}{3} \right)$$

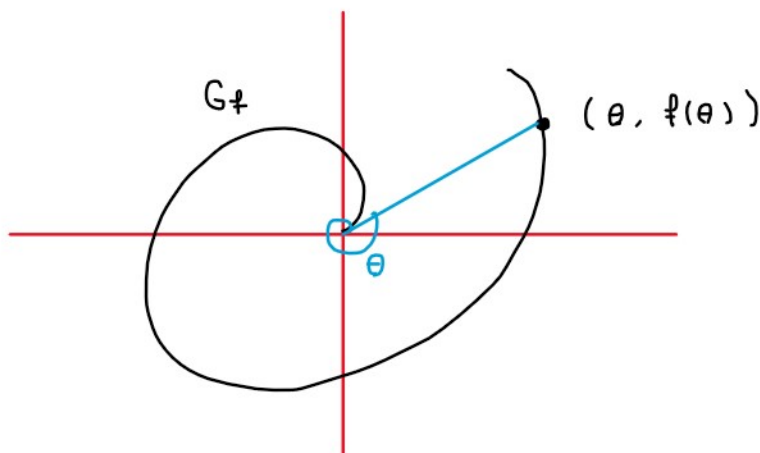
$$P_3 = P_2 + 12 \left(\frac{1}{9} \right)$$

...

Ejercicio 1. Sea f una función con derivada continua en $[\theta_1, \theta_2]$.

Demuestra que la longitud de la gráfica de f en coordenadas polares es

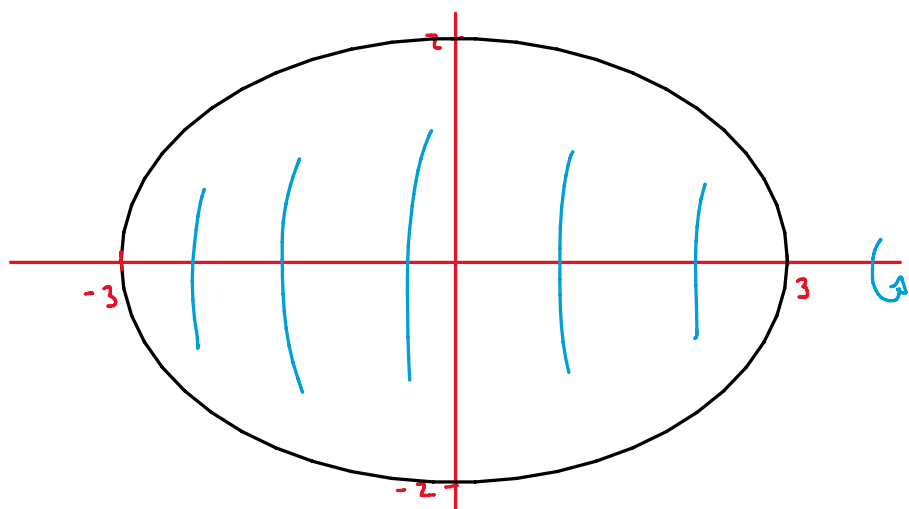
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$



¿Es posible expresar G_f como una curva parametrizada?

Sabemos que podemos pasar de coordenadas polares (r, θ) a coordenadas cartesianas $(x, y) \dots$

Ejemplo. Calcular el volumen del sólido de revolución que resulta de girar la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ alrededor del eje X .



Despejando y de la ecuación de la elipse:

$$y^2 = 4 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) = 4 \left(\frac{9}{9} - \frac{x^2}{9}\right) \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$ describe la mitad de la elipse que está por arriba del eje X

$$\text{Además } f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ o } x = -3$$

es decir, $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

Así, el volumen del sólido de revolución está dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^3 [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-3}^3 \frac{4}{9} (9 - x^2) dx \\ &= 4\pi \int_{-3}^3 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx \quad \text{función par en un intervalo simétrico} \\ &= 4\pi \cdot 2 \int_0^3 \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx \end{aligned}$$

$$= 8\pi \left[x - \frac{x^3}{27} \right] \Big|_0^3$$

$$= 8\pi [3 - 1] = \underline{16\pi}$$

Ejercicio. Determinar si la siguiente serie converge o diverge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$$

Definimos $f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ función decreciente

$$\Rightarrow f(n) = \frac{1}{n \log(n)} \quad \text{p.c. } n \geq 2$$

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x \log x} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\log(\log x)] \Big|_2^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\log(\log(b)) - \log(\log(2))] = \infty$$

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$\begin{aligned} u &= \log x \\ du &= \frac{1}{x} dx \end{aligned} \quad = \log u + c$$

$$\Rightarrow \int_2^{\infty} f(x) dx \text{ diverge}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \text{ diverge}$$