

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{R_{n,a}(x)}_{\text{Residuo}} \text{ para cada } x \in I.$$

Notemos que si $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,a}(x) = 0$, entonces

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Definición. Si F tiene derivadas de todos los órdenes en a , definimos la serie de Taylor de F en a como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

* En general no ocurre que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

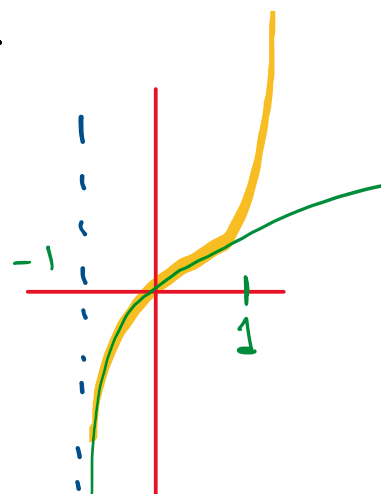
(esto sucede cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,a}(x) = 0$).

④ $F(x) = \log(x+1)$

$$\Rightarrow P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

$$R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$$



Ejercicio: demostrar que si $x \in (-1, 1]$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,0}(x) = 0$ y, como consecuencia de esto,

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \text{para toda } x \in (-1, 1]$$

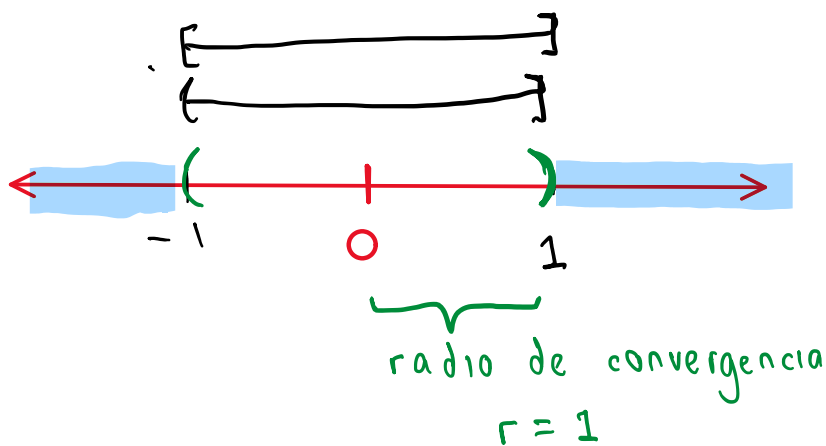
$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

⑤ $f(x) = \arctan x$

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$



Ejercicio: demostrar que si $x \in [-1, 1]$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,0}(x) = 0$ y, como consecuencia de esto,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{para toda } x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

- Para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- Si $x \in (-1, 1]$, entonces

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (*)$$

- Si $x \in [-1, 1]$, entonces

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (**)$$

Al sustituir $x=1$ en $(*)$ y $(**)$ obtenemos que

$$\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Si derivamos ambos lados de la igualdad (término a término) obtenemos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$-\sin x = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Definición. Si $a \in \mathbb{R}$, una función de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (a_n \in \mathbb{R})$$

será llamada serie de potencias centrada en a .

Notemos que f solo está definida para las x tales que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ converge.

Las series de Taylor son ejemplos de series de potencias, donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Consideremos la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

$$(a_{2n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{y} \quad a_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n)$$

¿ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?

Teorema (criterio de la raíz).

Sea $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$$

i) si $r < 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge,

ii) si $r > 1$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a 0, de modo que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

* Si $r = 1$, el criterio no da información.

Demostración.

Notemos que como $\sqrt[n]{a_n} \geq 0 \Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 0$.

i) Si $r < 1$, consideremos $s \in (r, 1) \Rightarrow \underline{0 \leq r} < \underline{s < 1}$.

Sea $\varepsilon = s - r > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N \quad |\sqrt[n]{a_n} - r| < s - r$$

$$\begin{array}{c} |a| < b \\ \updownarrow \\ -b < a < b \end{array}$$

$$\Rightarrow -(s-r) < \sqrt[n]{a_n} - r < s-r \Rightarrow 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < s$$

$$\Rightarrow 0 \leq a_n < s^n \quad \text{para toda } n \geq N$$

Como $|s| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} s^n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} s^n$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge (criterio de comparación)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

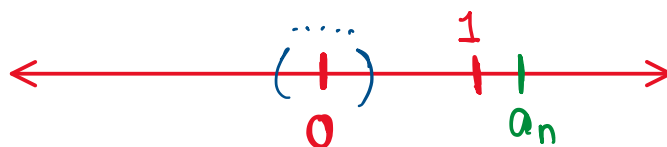
ii) Si $r > 1$, consideremos $s \in (1, r) \Rightarrow 1 < s < r$. Sea $\varepsilon = r - s > 0$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N \quad |\sqrt[n]{a_n} - r| < r - s$$

$$\Rightarrow \underbrace{s - r}_{-(r-s)} < \sqrt[n]{a_n} - r < r - s \Rightarrow 1 < s < \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{a_n}$$

$\Rightarrow 1 < a_n$ para cada $n \geq N$



$\Rightarrow$ la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a 0.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

* Si (a_n) converge, como $1 < a_n$ p.c. $n \geq N$
 $\Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$