

Teorema. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente, entonces para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un reordenamiento $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha.$$

Demostración.

Visto anteriormente:

Supongamos primero que $\alpha \geq 0$.

Sean $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión de términos no negativos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la sucesión de términos negativos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 0 \leq & a_1 & & a_4 & & a_6 & a_7 & a_8 & & & \leftarrow (p_k)_{k \in \mathbb{N}} \\
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \leftarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\
 & + & - & - & + & - & + & + & + & - & \\
 0 > & & a_2 & a_3 & & a_5 & & & & a_9 & \leftarrow (q_k)_{k \in \mathbb{N}}
 \end{array}$$

[...]

Mediante este procedimiento, podemos definir recursivamente sucesiones $N_1 < N_2 < \dots$ y $M_1 < M_2 < \dots$ de números naturales tales que

$$S_1 = \sum_{k=1}^{N_1} p_k, \quad T_1 = S_1 + \sum_{k=1}^{M_1} q_k,$$

$$S_{i+1} = T_i + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} p_k \quad \text{y} \quad T_{i+1} = S_{i+1} + \sum_{k=M_i+1}^{M_{i+1}} q_k$$

para cada $i \in \mathbb{N}$, con la propiedad de que

$$S_i - \alpha \leq p_{N_i} \quad \text{y} \quad \alpha - T_i \leq -q_{M_i}.$$

La sucesión

$$p_1, \dots, p_{N_1}, q_1, \dots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \dots, p_{N_2}, q_{M_1+1}, \dots, q_{M_2}, \dots$$

es un reordenamiento de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Como $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son subsucesiones de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0$$

Además, como $N_1 < N_2 < \dots$ y $M_1 < M_2 < \dots$, entonces

$(p_{N_i})_{i \in \mathbb{N}}$ es subsucesión de $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(q_{M_i})_{i \in \mathbb{N}}$ es subsucesión

de $(q_k)_{k \in \mathbb{N}} \Rightarrow \boxed{\lim_{i \rightarrow \infty} p_{N_i} = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\lim_{i \rightarrow \infty} q_{M_i} = 0}.$

Continuación:

Consideremos $\varepsilon > 0$

Sea $J \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq J$, entonces $|p_{N_j}| < \varepsilon$ y $|q_{M_j}| < \varepsilon$.

Así, si $j \geq J$, entonces

$$|S_j - \alpha| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |\alpha - T_j| < \varepsilon.$$

$p_1, \dots, p_{N_j}, q_1, \dots, q_{M_j}, p_{N_{j+1}}, \dots, p_{N_{j+1}-1}, q_{M_{j+1}}, \dots, q_{M_{j+1}-1}, \dots \quad (*)$

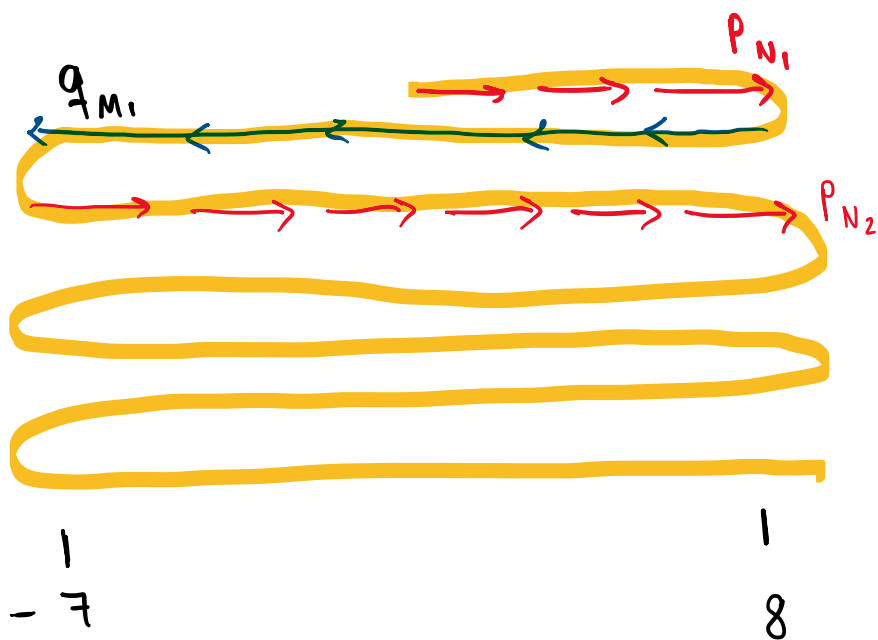
$s(b)$

Veamos que para cualquier término b a la derecha de q_{M_j} se cumple que $|S(b) - \alpha| < \varepsilon$, donde $S(b)$ es la suma parcial de la sucesión $(*)$ hasta b . Consideremos $j \geq J$.

• Si $b = p_k$ para alguna $k \in \{N_j+1, N_j+2, \dots, N_{j+1}-1\}$

$$\Rightarrow T_j \leq S(b) < \alpha \Rightarrow |\alpha - S(b)| \leq |\alpha - T_j| < \varepsilon$$

• Si $b = p_{N_{j+1}} \Rightarrow \alpha < S(b) = S_{j+1} \Rightarrow |S(b) - \alpha| = |S_{j+1} - \alpha| < \varepsilon$



Lema. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, $N \in \mathbb{N}$ y $J = \{n \in \mathbb{N} \mid n > N\}$ es un conjunto finito y no vacío, entonces

$$\left| \sum_{n \in J} a_n \right| \leq \sum_{n \in J} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

Demostración.

Sea $M = \max J \Rightarrow J = \{n \in \mathbb{N} \mid N+1 \leq n \leq M\}$.

$$\Rightarrow \left| \sum_{n \in J} a_n \right| \leq \sum_{n \in J} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^M |a_n| \stackrel{*}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|.$$

desigualdad del Δ

* Si $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $S_n = \sum_{k=1}^n a_k \Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente.

Sabemos que

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente

y además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^N a_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{para toda } N \in \mathbb{N}$$

Teorema Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una reordenación cualquiera de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge (absolutamente) y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{y} \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Sea $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Demostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = L$, es decir, que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = L$.

Consideremos $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergen, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^N a_n \right| < \epsilon/3 \quad \gamma$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^N |a_n| \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que cada uno de los términos $a_1, \dots, a_N$ aparezca entre los términos $b_1, \dots, b_M$.

$b_1, \overset{a_N}{\textcircled{b_2}}, b_3, \overset{a_2}{\textcircled{b_4}}, b_5, \overset{a_1}{\textcircled{b_6}}, b_7, \overset{a_1}{\textcircled{b_8}}, b_9, \dots, \overset{a_3}{\textcircled{b_m}}, b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_M$
 $a_{\square} \quad a_{\square} \quad a_{\square} \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \leftarrow m \geq M$

Sea $m \geq M$. Demostraremos que

$$\left| \sum_{n=1}^8 a_n - \sum_{k=1}^3 b_k \right| < \varepsilon.$$

Entonces existe un conjunto finito $I \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N+1\}$.

tal que

$$\sum_{k=1}^m b_k - \sum_{k=1}^N a_k = \sum_{k \in T} a_k$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^3 b_k - \sum_{k=1}^N a_k \right| = \left| \sum_{k \in I} a_k \right| \leq \sum_{k \in I} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^3 b_k \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{k=1}^3 b_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^N a_n \right| + \left| \sum_{k=1}^3 b_k - \sum_{n=1}^N a_n \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Falta mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente.

Como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una reordenación de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ es un reordenamiento de $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge absolutamente,

deducimos de la primera parte del teorema que

$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge (y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$).

Ejemplo:

Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \underline{1} - \frac{1}{4} + \underline{\frac{1}{9}} - \frac{1}{16} + \underline{\frac{1}{25}} - \frac{1}{36} + \dots$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolutamente

$\Rightarrow$ cualquier reordenamiento de $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ produce una serie que converge al mismo número real.