

- Ejemplo:

Como  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión decreciente y  $\frac{1}{n} \geq 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \text{ converge.}$$

$$\text{Sea } x = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{\text{blue}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}}_{\text{green}} + \dots$$

$$\boxed{=} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} x \Rightarrow \frac{1}{2} x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \dots \leq x$$

Por otro lado,  $s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  y por la demostración del

teorema de Leibniz

$$\frac{1}{2} = s_2 \leq x \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq x} \quad \text{!}$$

\* Con una suma infinita (serie) no hay conmutatividad, es decir, el orden de los sumandos sí puede alterar la suma.

Definición. Una serie  $\sum a_n$  converge condicionalmente si  $\sum a_n$  converge pero no converge absolutamente ( $\sum |a_n|$  diverge).

Ejemplo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge condicionalmente}$$

Lema. Si una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge condicionalmente, entonces tanto  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  divergen.

Demostración

Por definición,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge y  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverge.

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverge, entonces al menos una serie de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  o  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  diverge.

Recordemos que  $a_n = a_n^+ + a_n^-$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  converge, como  $a_n^- = a_n - a_n^+ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  converge !

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  converge, como  $a_n^+ = a_n - a_n^- \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  converge !

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  divergen.

Definición. Decimos que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es un reordenamiento de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si existe una función biyectiva  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (llamada permutación) tal que

$$b_n = a_{F(n)} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \dots \right) = \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

entonces

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \dots \right)$$

es un reordenamiento de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

| $(a_n)$              |                              | $(b_n) \quad b_n = a_{F(n)}$ |            |                                                                                                                                                   |
|----------------------|------------------------------|------------------------------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a_1 = 1$            | $\xrightarrow{\text{red}}$   | $1 = b_1 = a_1$              | $F(1) = 1$ | Para este reordenamiento,<br>$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$<br>está definida como<br>$F(3n) = 4n$<br>$F(3n-1) = 4n-2$<br>$F(3n-2) = 2n-1$ |
| $a_2 = -\frac{1}{2}$ | $\xrightarrow{\text{green}}$ | $-\frac{1}{2} = b_2 = a_2$   | $F(2) = 2$ |                                                                                                                                                   |
| $a_3 = \frac{1}{3}$  | $\xrightarrow{\text{green}}$ | $-\frac{1}{4} = b_3 = a_4$   | $F(3) = 4$ |                                                                                                                                                   |
| $a_4 = -\frac{1}{4}$ | $\xrightarrow{\text{red}}$   | $\frac{1}{3} = b_4 = a_3$    | $F(4) = 3$ |                                                                                                                                                   |
| $a_5 = -\frac{1}{5}$ | $\xrightarrow{\text{green}}$ | $-\frac{1}{6} = b_5 = a_7$   | $F(5) = 6$ |                                                                                                                                                   |
| $a_6 = -\frac{1}{6}$ | $\xrightarrow{\text{green}}$ | $-\frac{1}{8} = b_6 = a_8$   | $F(6) = 8$ |                                                                                                                                                   |
| $a_7 = \frac{1}{7}$  | $\xrightarrow{\text{red}}$   | $\frac{1}{5} = b_7 = a_5$    | $\vdots$   |                                                                                                                                                   |
| $a_8 = -\frac{1}{8}$ | $\xrightarrow{\text{green}}$ | $-\frac{1}{10}$              |            |                                                                                                                                                   |

Teorema. Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge condicionalmente, entonces para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$  existe un reordenamiento  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha.$$

Demostración.

Supongamos primero que  $\alpha \geq 0$ .

Sean  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la sucesión de términos no negativos de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la sucesión de términos negativos de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\begin{array}{cccccccccc}
 0 \leq & a_1 & & a_4 & & a_6 & a_7 & a_8 & & & \leftarrow (p_k)_{k \in \mathbb{N}} \\
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \leftarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\
 & + & - & - & + & - & + & + & + & - & \\
 0 > & & a_2 & a_3 & & a_5 & & & & a_9 & \leftarrow (q_k)_{k \in \mathbb{N}}
 \end{array}$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge condicionalmente, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$  divergen (ambas).

Como  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  diverge, entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{k=1}^n p_k > \alpha$

(en caso contrario, la sucesión de sumas parciales estaría acotada superiormente por  $\alpha$ ). Sea

$$N_1 = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n p_k > \alpha \} \Rightarrow \sum_{k=1}^{N_1-1} p_k \leq \alpha < \sum_{k=1}^{N_1} p_k$$

$$\text{Sea } S_1 = \sum_{k=1}^{N_1} p_k \Rightarrow S_1 - \alpha \leq p_{N_1}$$

Usando que  $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$  diverge, definimos

$$M_1 = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid S_1 + \sum_{k=1}^n q_k < \alpha \}$$

$$\Rightarrow S_1 + \sum_{k=1}^{M_1} q_k < \alpha \leq S_1 + \sum_{k=1}^{M_1-1} q_k$$

$$\text{Sea } T_1 = S_1 + \sum_{k=1}^{M_1} q_k \Rightarrow \alpha - T_1 \leq -q_{M_1}$$

Como  $\sum_{k=N_1+1}^{\infty} p_k$  diverge, existe  $n \in \mathbb{N}$  t.q.  $T_1 + \sum_{k=N_1+1}^n p_k > \alpha$ .

Sea

$$N_2 = \min \left\{ n > N_1 \mid T_1 + \sum_{k=N_1+1}^n p_k > \alpha \right\} \Rightarrow T_1 + \sum_{k=N_1+1}^{N_2-1} p_k \leq \alpha < T_1 + \sum_{k=N_1+1}^{N_2} p_k$$

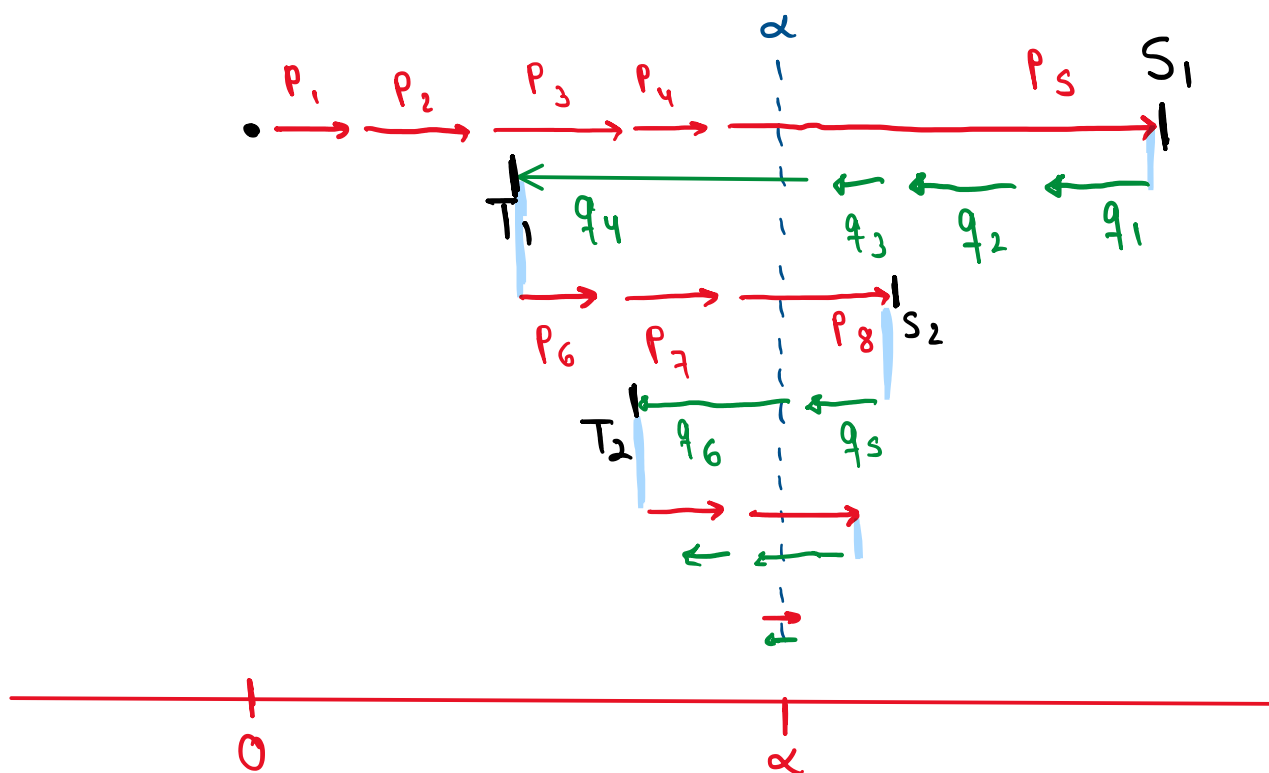
Definimos  $S_2 = T_1 + \sum_{k=N_1+1}^{N_2} p_k \Rightarrow S_2 - \alpha \leq p_{N_2}$

Como  $\sum_{k=M_1+1}^{\infty} q_k$  diverge, existe  $n \in \mathbb{N}$  t.q.  $S_2 + \sum_{k=M_1+1}^n q_k < \alpha$

$$M_2 = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid S_2 + \sum_{k=M_1+1}^n q_k < \alpha \right\}$$

$$\Rightarrow S_2 + \sum_{k=M_1+1}^{M_2} q_k < \alpha \leq S_1 + \sum_{k=M_1+1}^{M_2-1} q_k$$

Sea  $T_2 = S_2 + \sum_{k=M_1+1}^{M_2} q_k \Rightarrow \alpha - T_1 \leq -q_{M_2}$



Mediante este procedimiento, podemos definir recursivamente sucesiones  $N_1 < N_2 < \dots$  y  $M_1 < M_2 < \dots$  de números naturales

tales que

$$S_1 = \sum_{k=1}^{N_1} p_k, \quad T_1 = S_1 + \sum_{k=1}^{M_1} q_k,$$

$$S_{i+1} = T_i + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} p_k \quad \text{y} \quad T_{i+1} = S_{i+1} + \sum_{k=M_i+1}^{M_{i+1}} q_k$$

para cada  $i \in \mathbb{N}$ , con la propiedad de que

$$S_i - \alpha \leq p_{Ni} \quad \text{y} \quad \alpha - T_i \leq -q_{Mi}$$

## La sucesión

$$p_1, \dots, p_{N_1}, q_1, \dots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \dots, p_{N_2}, q_{M_1+1}, \dots, q_{M_2}, \dots$$

es un reordenamiento de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Como  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  son subsucesiones de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0$$

Además, como  $N_1 < N_2 < \dots$  y  $M_1 < M_2 < \dots$ , entonces

$(p_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  es subsucesión de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(q_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$  es subsucesión

$$\text{de } (q_k)_{k \in \mathbb{N}} \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} p_{N_i} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} q_{M_i} = 0.$$

