

Definición Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $L \in \mathbb{R}$ si
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$.

Definición. Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy si
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} (n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$.

Teorema. Una sucesión de números reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$ si y solo si es de Cauchy.

Teorema (criterio de Cauchy)

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si
 $\lim_{n, m \rightarrow \infty} a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m = 0,$

es decir, si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} (m \geq n \geq N \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon).$$

Demostración.

Sea $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\stackrel{\text{def.}}{\iff} (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\iff (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy

$$\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} (m \geq n \geq N \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} (m \geq n \geq N \Rightarrow |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon)$$

$$* s_m = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m$$

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

Definición. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Ejemplos:

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ no es absolutamente convergente

porque $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \underline{1} - \frac{1}{4} + \underline{\frac{1}{9}} - \frac{1}{16} + \dots$ sí es absolutamente convergente

porque $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Teorema. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Además, una serie es absolutamente convergente si y solo si la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son ambas convergentes.

Demostración

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.
(P.D. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge).

Utilizaremos el criterio de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall n, m \in \mathbb{N} \ (m \geq n \geq N \Rightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| < \varepsilon).$

Notemos que por la desigualdad del triángulo, si $m, n \geq N$

$$\Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$$

Luego,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N} \ (m \geq n \geq N \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon).$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Definimos ahora para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0 \\ a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Veamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \text{ convergen.}$$

Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \underline{a_n^+} + a_n^-, \quad |a_n| = \underline{a_n^+} - a_n^-, \quad (*)$$

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \quad \text{y} \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2} \quad (**)$$

$\Rightarrow$] Sup. que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge

Usando (**) tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + |a_n|) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right)$$

$\Leftarrow$] Sup. ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \text{ converge.}$$

Observación:

Por el teorema anterior, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos no negativos que converge, entonces cualquier serie obtenida al modificar signos de $\sum a_n$ será convergente (por ser absolutamente convergente).

Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots \text{ converge}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots \text{ converge}$$

Teorema. (Teorema de Leibniz).

Si $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \geq 0$ ($(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y $a_n \geq 0$ p.c. $n \in \mathbb{N}$)

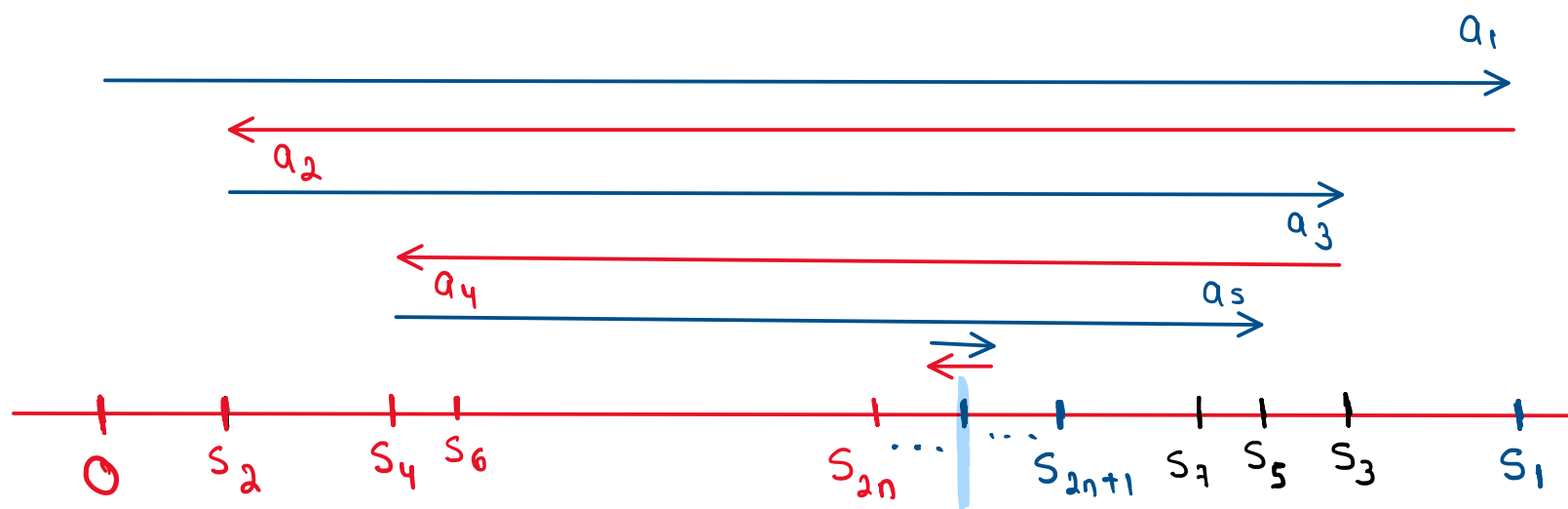
y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \underline{a_1} - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$$

converge.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$



Demostraremos que

i) $S_{2n} \leq S_{2n+2}$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

ii) $S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

iii) $S_l \leq S_k$ si l es par y k es impar.

Sea $n \in \mathbb{N}$.

i) Como $a_{2n+1} \geq a_{2n+2} \Rightarrow a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$

$$\Rightarrow S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n} \Rightarrow \boxed{S_{2n+2} \geq S_{2n}}$$

ii) Como $a_{2n} \geq a_{2n+1} \Rightarrow -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$

$$\Rightarrow S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1} \Rightarrow S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

iii) Notemos que $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n}$ (porque $a_{2n+1} \geq 0$)

$$\Rightarrow S_{2n+1} \geq S_{2n} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

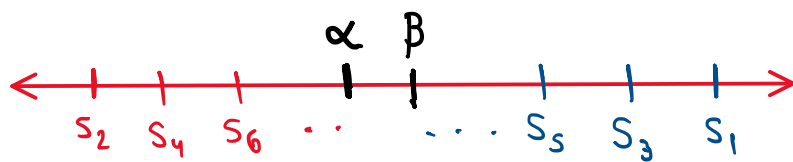
Sean $l, k \in \mathbb{N}$ tales que l es par y k es impar

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $k, l \leq 2n \leq 2n+1$

Como $l \leq 2n$ y ambos son pares, debido a i) tenemos que $S_l \leq S_{2n}$

y como $k \leq 2n+1$ y ambos son impares, usando ii) deducimos que $S_{2n+1} \leq S_k$

$$\Rightarrow S_l \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_k \Rightarrow S_l \leq S_k.$$



Por iii) y * sabemos que

$$\sup \{S_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \inf \{S_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

* Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son no vacíos y $\forall a \in A \forall b \in B \quad a \leq b \Rightarrow \sup A \leq \inf B.$

Sean $\alpha = \sup \{S_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\beta = \inf \{S_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\}.$

Como $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente (y está acotada superiormente), entonces converge a α . Similarmente, como $(S_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente (y está acotada inferiormente), entonces converge a β .

Falta probar que $\alpha = \beta$.

Notemos que $S_{2n} \leq \alpha \leq \beta \leq S_{2n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 \leq \beta - \alpha \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$$

$$(S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \Rightarrow S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1})$$

Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0 \Rightarrow \beta - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \beta.$

Concluimos que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\alpha = \beta$, es decir,

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

• Ejemplo:

Como $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y $\frac{1}{n} \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \text{ converge.}$$

$$\text{Sea } x = \underline{1} - \underline{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \underline{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \underline{\frac{1}{7}} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$= \underline{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} x \Rightarrow \frac{1}{2} x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Por otro lado, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ y por la demostración del teorema de Leibniz

$$\frac{1}{2} = S_2 \leq x \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq x} \quad \text{!}$$