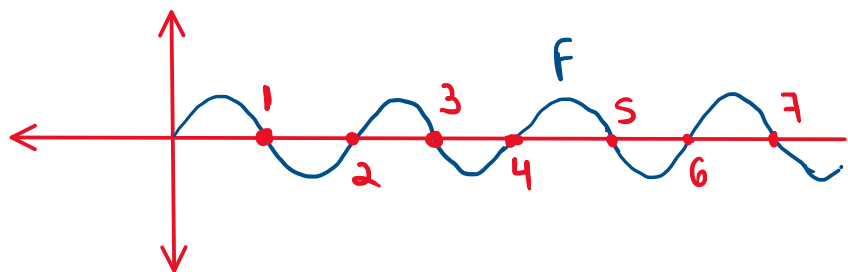


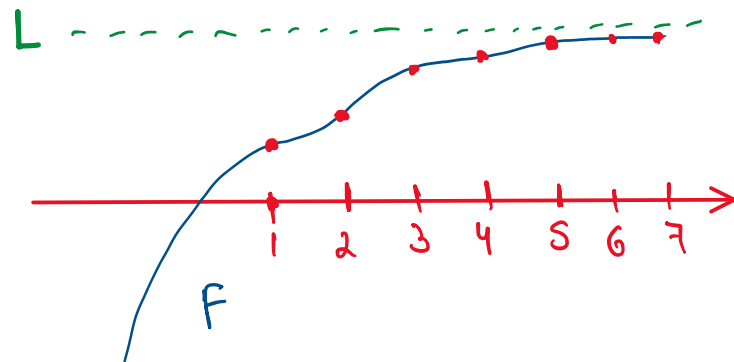
Lema. Si $F: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$$

(si alguno de estos límites existe).



$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ no existe

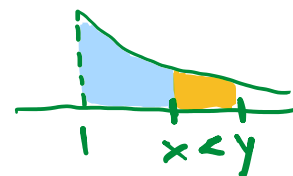


$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Lema. Si $F: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa, entonces

$$\int_1^\infty F(x) dx = \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b F(x) dx}_{\text{límite de función } (b \in \mathbb{R})} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n F(x) dx}_{\text{límite de sucesión } (n \in \mathbb{N})}$$

siempre que alguno de estos límites exista.



Demostración

Sea $F: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

Veamos que F es creciente.

Sean $x, y \in [1, \infty)$ t.q. $x \leq y$. Como $f(t) \geq 0$ para cada $t \in [x, y]$

$$\Rightarrow \int_x^y f(t) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_1^y f(t) dt = \int_1^x f(t) dt + \underbrace{\int_x^y f(t) dt}_{\geq 0} \geq \int_1^x f(t) dt$$

$\Rightarrow F(y) \geq F(x) \Rightarrow F$ es creciente.

Luego, como F es monótona, por el lema anterior tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n), \text{ es decir,}$$

$$\int_1^{\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(t) dt$$

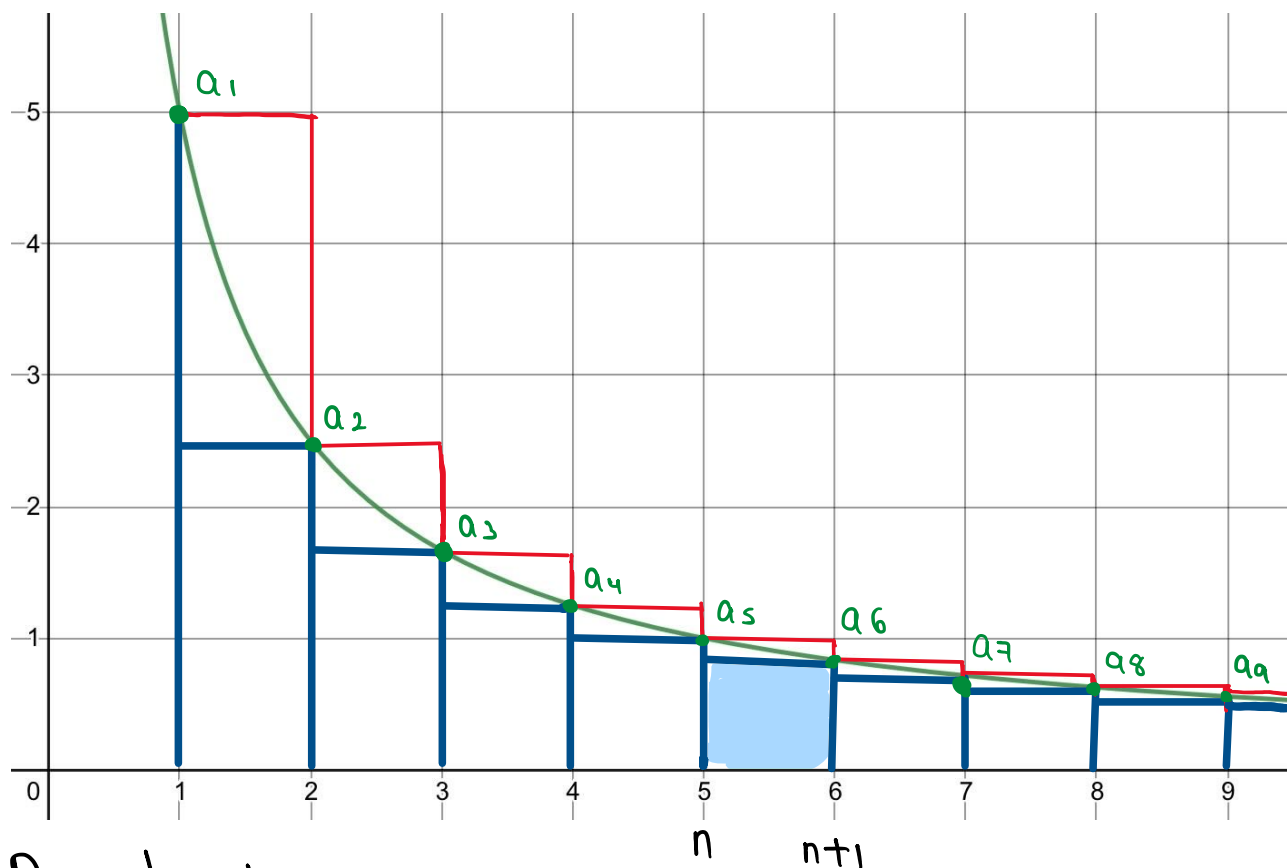
(siempre que alguno de estos límites exista.

Teorema (criterio de la integral)

Sea $F: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva y decreciente.

Si $a_n = F(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} F(x) dx \text{ converge}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow F(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\text{Upper sum} = \sum_{k=1}^8 a_k$$

$$\text{Lower sum} = \sum_{k=2}^8 a_k$$

Demostración

Como F es decreciente, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [n, n+1] \quad a_{n+1} = F(n+1) \leq F(x) \leq F(n) = a_n$$

$$\Rightarrow \underline{a_{n+1}} = \int_n^{n+1} a_{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} F(x) dx \leq \int_n^{n+1} a_n dx = a_n$$

$$\Rightarrow 0 < a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n \quad (\text{para cada } n \in \mathbb{N}).$$

$$\Rightarrow] \text{ Sup. que } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \text{ converge}$$

(comparación)

Notemos ahora que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \int_n^{n+1} f(x) dx$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_m^{m+1} f(x) dx \right]$$

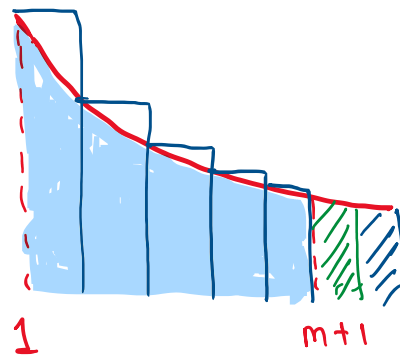
$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^{m+1} f(x) dx \quad (m \in \mathbb{N})$$

Lema

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx \quad (b \in \mathbb{R})$$

$$= \int_1^{\infty} f(x) dx$$

$$\therefore \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k}$$

$\Leftarrow]$ Supongamos ahora que $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(x) dx \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Lema

Recordemos que

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{m-1}^m f(x) dx \right)$$

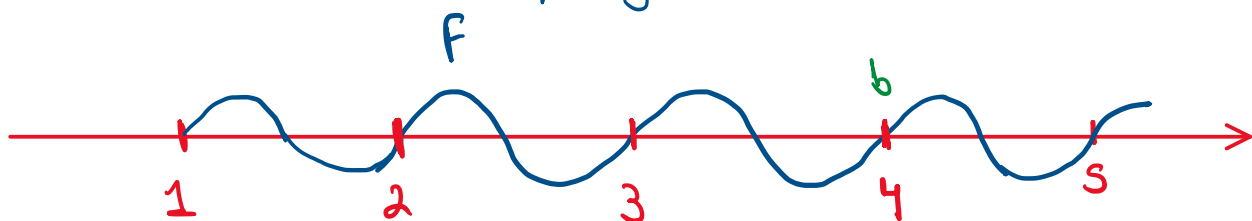
$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{m-1} \int_n^{n+1} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \text{ converge}$$

Como $0 < a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por el criterio de comparación concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ converge (y es igual a $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$)
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

* En general no ocurre que $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(x) dx$ ($m \in \mathbb{N}$)

Sea F la Función cuya gráfica se muestra a continuación:



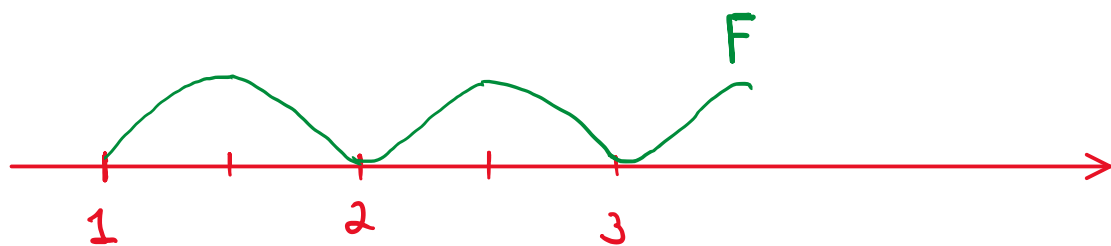
$$\text{si } m \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_1^m f(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^m f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

pero $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx$ no existe

($\int_1^{\infty} f$ diverge, pero $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx \neq \pm \infty$)

* si $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ ($x \geq 1$), entonces la gráfica de F tiene el siguiente comportamiento:



Ejemplo:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p > 0)$

Sea $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{1}{x^p}$

Notemos que $f(x) = x^{-p} = e^{-p \log(x)}$ > 0 para cada $x \in [1, \infty)$

Sean $x, y \in [1, \infty)$ tales que $x \leq y$

$$\Rightarrow \log(x) \leq \log(y)$$

$$\Rightarrow -p \log(x) \geq -p \log(y) \quad (-p < 0 \text{ porque } p > 0)$$

$$\Rightarrow e^{-p \log(x)} \geq e^{-p \log(y)}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad \therefore \text{ f es decreciente. }$$

Por el criterio de la integral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ converge}$$

Veamos en qué casos $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge.

- si $p = 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \log(b) = \infty$

$$\therefore \text{ si } p = 1, \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ diverge.}$$

- si $p \neq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{x^{p-1}} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Notemos que $\frac{1}{b^{p-1}} = b^{1-p} = e^{(1-p)\log(b)}$

- Si $p > 1 \Rightarrow 0 > 1-p$.

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} \log(b) = \infty \Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} (1-p)\log(b) = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(1-p)\log(b)} = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{p-1}} = 0 \Rightarrow \boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}} \quad \text{si } p > 1$$

- Si $0 < p < 1 \Rightarrow 1-p > 0$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} \log(b) = \infty \Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} (1-p)\log(b) = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} e^{(1-p)\log(b)} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \infty \Rightarrow \boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ diverge si } 0 < p < 1}$$

$$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{diverge si } 0 < p \leq 1 \\ = \frac{1}{p-1} \text{ (converge) si } p > 1 \end{cases}$$

Concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{diverge si } 0 < p \leq 1 \\ \text{converge si } p > 1 \end{cases}$$

Nota: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ \infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$

Los criterios anteriores han sido enunciados para series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos no negativos ($a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$).

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie con términos no positivos ($a_n \leq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$), podemos utilizar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = - \sum_{n=1}^{\infty} -a_n,$$

donde $-a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo:

- $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$

Sup. que $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -(-\frac{1}{n})$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge!

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ diverge

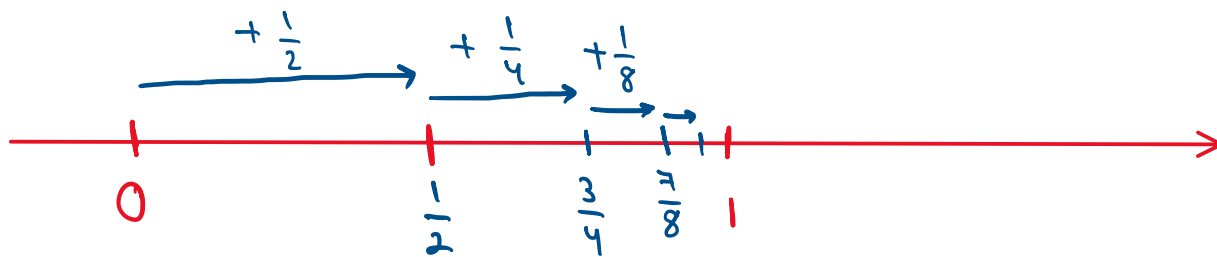
- $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n!}$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n!}$ converge.

Ejercicio: Demostrar que las siguientes series convergen y calcular su suma:

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$)

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \quad (\text{si } |r| < 1)$$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

Notemos que

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

• si $n=0 \rightarrow 1 = A$

$n=-1 \rightarrow 1 = -B \rightarrow B = -1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]$$

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]$$

suma telescópica

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] = 1 - 0 = 1$$