

Proposición (condición del resto)

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Teorema. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces

1) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

2) Para cada $c \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (c a_k)$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty} (c a_k) = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Teorema. Si $N \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y solo si $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ converge. En este caso

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

Teorema (criterio de acotación)

Si $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y solo si la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada (acotada superiormente)

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Teorema (criterio de comparación)

Supongamos que $0 \leq a_k \leq b_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

1) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

2) Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.

Teorema (criterio de comparación en el límite)

Si $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge.

Demostración

Como $\frac{a_n}{b_n} \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N} \Rightarrow C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq 0$. Dado que $C \neq 0 \Rightarrow C > 0$.

Luego, como $\frac{C}{2} > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - C \right| < \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{C}{2} < \frac{a_n}{b_n} - C < \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}C$$

$$\Rightarrow \frac{C}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} C b_n \quad \text{para toda } n \geq N \quad (*)$$

$\Rightarrow$] Sup. que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{C} a_n$ converge.

Usando $(*)$ tenemos que $0 < b_n < \frac{2}{C} a_n$ para toda $n \geq N$ y deducimos del criterio de comparación que $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ converge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

$\Leftarrow$] Sup. ahora que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{3} C b_n$ converge

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \quad (\text{por } (*) \text{ y el criterio de comparación})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Ejemplo

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n-1}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{n^2+1} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 \quad y$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1} \text{ diverge.}$$

Teorema (criterio del cociente)

Sea $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

i) si $r < 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

ii) si $r > 1$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a 0, de modo que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

* Si $r = 1$, el criterio no da información

Demostración.

Notemos que como $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0 \Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 0$.

i) Si $r < 1$, consideremos $s \in (r, 1) \Rightarrow r < s < 1$.

Sea $\varepsilon = s - r > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < s - r$$

$$\Rightarrow -(s-r) < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < s-r \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < s$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n S \quad \text{para toda } n \geq N \quad (\Delta)$$

$$\Rightarrow a_{N+1} < a_N S$$

$$a_{N+2} < a_{N+1} S < a_N S \cdot S = a_N S^2 \Rightarrow a_{N+2} < a_N S^2$$

$$a_{N+3} < a_{N+2} S < a_N S^2 \cdot S = a_N S^3 \Rightarrow a_{N+3} < a_N S^3$$

$$* a_{N+k} < a_N S^k \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}$$

* (Inducción sobre k)

• (base $k=1$) Consideramos $n=N$ en $(\Delta) \Rightarrow a_{N+1} < a_N S$.

• Sea $k \in \mathbb{N}$ y sup. que $a_{N+k} < a_N S^k$

$$\Rightarrow a_{N+(k+1)} < a_{N+k} S < a_N S^k \cdot S = a_N S^{k+1}$$

(Δ) h.i.
 $n=N+k$

Como $0 \leq r < s < 1 \Rightarrow |s| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} S^k$ converge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_N S^k$ converge.

Por el criterio de comparación, como $0 < a_{N+k} < a_N S^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge.}$$

ii) Si $r > 1$, consideremos $s \in (1, r) \Rightarrow 1 < s < r$. Sea $\varepsilon = r - s > 0$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < r - s$$

$$\Rightarrow \underbrace{s - r}_{-(r-s)} < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < r - s \Rightarrow s < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\Rightarrow s a_n < a_{n+1} \quad \text{para cada } n \geq N$$

$$\Rightarrow s a_N < a_{N+1}$$

$$s^2 a_N < s a_{N+1} < a_{N+2} \Rightarrow s^2 a_N < a_{N+2}$$

(**) $s^k a_N < a_{N+k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ (prueba por inducción similar a i))

Como $1 < |s| \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} s^k$ diverge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} s^k a_N$ diverge (porque $a_N > 0$)

$\Rightarrow \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ diverge (criterio de comparación)

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Otra forma:

Como $s > 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s^k = \infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} s^k a_N = \infty$ ($a_N > 0$)

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{N+k} = \infty \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a 0 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Ejemplos.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Sea $a_n = \frac{1}{n!}$ para toda $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n > 0$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Por el criterio del cociente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge

(Después veremos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ o, equivalentemente, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$).

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \quad (r > 0)$

Sea $a_n = \frac{r^n}{n!}$ para cada $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n > 0$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} \cdot n!}{r^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n+1} = 0 < 1$$

Por el criterio del cociente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ converge

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{n!} = 0 \quad (\text{criterio del resto}).$$

- Demostrar que si $0 < r < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$.

Sea $a_n = n r^n$ para cada $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n > 0$ y

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{n r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot r \right) \\ &= r \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = r \cdot 1 = r < 1 \end{aligned}$$

Por el criterio del cociente tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n r^n$ converge

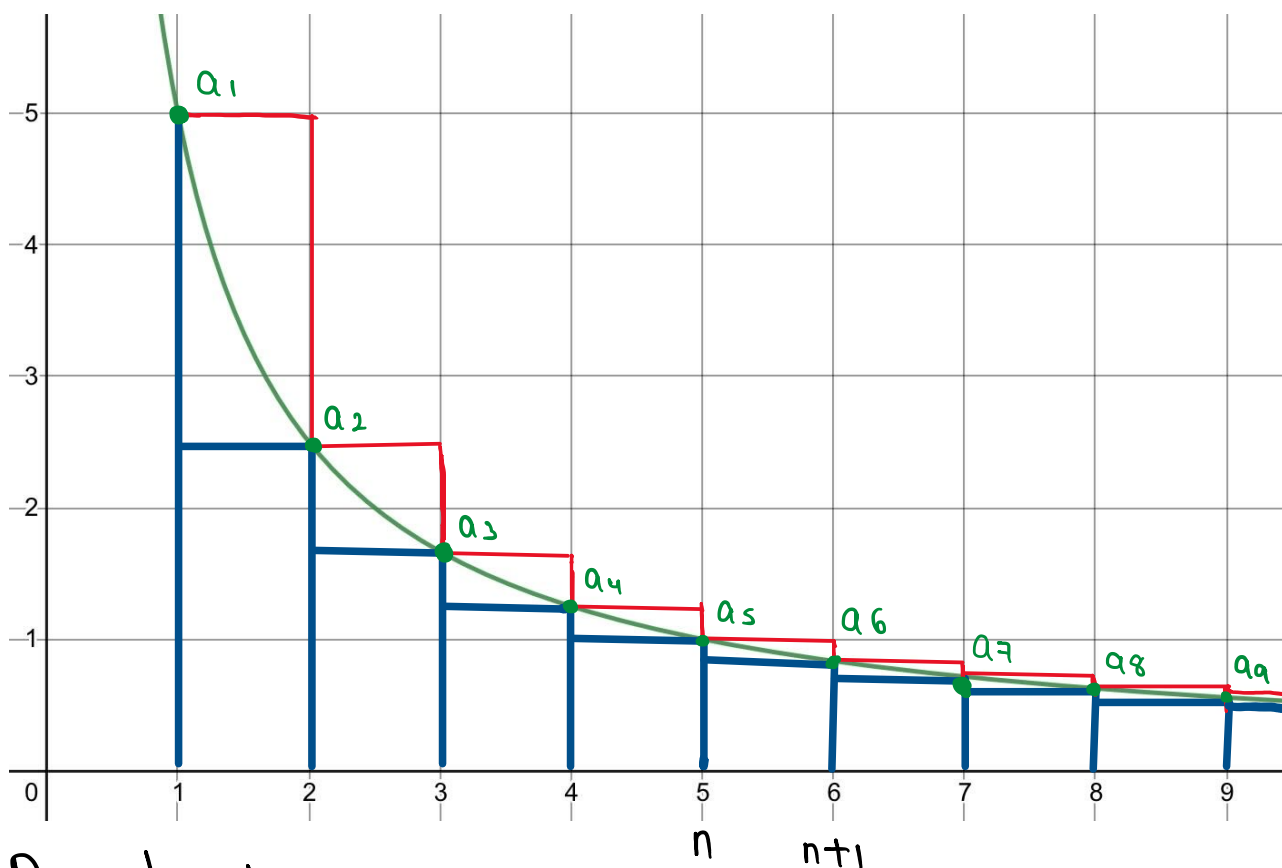
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0 \quad (\text{criterio del resto}).$$

Teorema (criterio de la integral)

Sea $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva y decreciente.

Si $a_n = f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow F(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=2}^{\infty} a_k$$

Demostración

Como F es decreciente, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [n, n+1] \quad a_{n+1} = F(n+1) \leq F(x) \leq F(n) = a_n$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \int_n^{n+1} a_{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} F(x) dx \leq \int_n^{n+1} a_n dx = a_n$$

$$\Rightarrow 0 < a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} F(x) dx \leq a_n \quad (\text{para cada } n \in \mathbb{N}).$$

$$\Rightarrow] \text{ Sup. que } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} F(x) dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} F(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \int_n^{n+1} F(x) dx \text{ existe y}$$

$$\text{es igual a } \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\int_1^2 F(x) dx + \int_2^3 F(x) dx + \dots + \int_m^{m+1} F(x) dx \right]$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_1^{m+1} F(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} F(x) dx \text{ converge}$$

