

Dada una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definimos  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Decimos que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe y es un número real. En este caso escribiremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverge

4) Series geométricas  $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$  ( $r \in \mathbb{R}$ )

\* Si  $r=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$  diverge.

$r=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 0$  converge a 0

Sea  $S_n = 1 + r + \dots + r^n = \sum_{k=0}^n r^k$

$$\Rightarrow \frac{-rS_n = -r - r^2 - \dots - r^n - r^{n+1}}{S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}}$$

$$\Rightarrow S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

\* Si  $|r| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - 0}{1 - r}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1 \quad (r \neq 0)$$

\* Si definimos  $0^0 = 1$ , esto también se cumple para  $r=0$

\* Si  $|r| \geq 1 \Rightarrow (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  no converge a 0

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k$  diverge

Proposición

Proposición (condición del resto)

Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Demostración.

Sea  $L = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , donde  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

Como  $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$  si  $n \geq 2$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = L - L = 0.$$

\* Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = L$  para todo  $k \in \mathbb{N}$

\* La condición anterior (que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ) no es suficiente para garantizar que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converja.

Por ejemplo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , pero  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverge.

Teorema. Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  convergen, entonces

1)  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  converge y  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

2) Para cada  $c \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (c a_k)$  converge y  $\sum_{k=1}^{\infty} (c a_k) = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

## Demostración

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)}_{\text{suma finita}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

2) Ejercicio.

$$* \sum_{k=N}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1} + \dots)$$

Teorema. Si  $N \in \mathbb{N}$ , entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge si y solo si  $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$  converge. En este caso

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

## Demostración

Notemos que para cada  $n \geq N$  se cumple que

$$\sum_{k=1}^n a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} a_k}_{\text{constante (no depende de } n)} + \sum_{k=N}^n a_k$$

$$\Rightarrow] \text{ Si } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \text{ existe}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{N-1} a_k$$

$$\Leftrightarrow S, \sum_{k=N}^{\infty} a_k \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n a_k \text{ existe}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^n a_k \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N}^n a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

Ejemplo:

$$S, |r| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{1 - (1-r)}{1-r} = \frac{r}{1-r}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

Teorema (criterio de acotación)

Si  $a_n \geq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge si y solo si la sucesión de sumas parciales  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada (acotada superiormente).

Demostración.

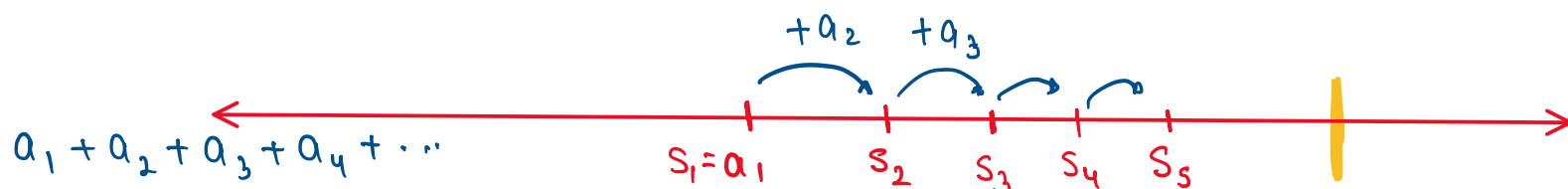
Como  $a_n \geq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \Rightarrow S_{n+1} \geq S_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente.

Luego,  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada (acotada superiormente).

Es decir,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge  $\Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada (acotada superiormente).



## Teorema (criterio de comparación)

Supongamos que  $0 \leq a_k \leq b_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

1) Si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge

2) Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverge, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  diverge.

### Demostración

1) Supongamos que  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge. Como  $b_k \geq 0$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , por el criterio de acotación tenemos que la sucesión de sumas parciales  $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada superiormente, es decir, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq M \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, como  $a_k \leq b_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq M \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Como la sucesión  $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada superiormente por  $M$  y  $a_k \geq 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , deducimos del criterio de acotación que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge.

2) es la contrapuesta de 1).

$$* \text{ Si } a_k \leq b_k \text{ para toda } k \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\begin{matrix} a \leq b \\ c \leq d \end{matrix} \Rightarrow a+c \leq b+d$$

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin^3(n+1)}{2^n + n^2}$$

$$\text{Sea } n \in \mathbb{N} \Rightarrow -1 \leq \sin(n+1) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^3(n+1) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 \leq 2 + \sin^3(n+1) \leq 3$$

Por otro lado,

$$0 < 2^n \leq 2^n + n^2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n + n^2} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2 + \sin^3(n+1)}{2^n + n^2} \leq \frac{3}{2^n} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N},$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  converge (  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  es una serie geométrica con  $r = \frac{1}{2}$  ),

inferimos del criterio de comparación que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin^3(n+1)}{2^n + n^2}$  converge.

$$* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \left[ \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 3 \left[ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right] = 3(1) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \text{Idea: } \frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{n^2+1} ?$$

Observemos que si  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{n^2+1} \iff \underset{n>0}{1(n^2+1)} \leq n(n+1) \iff n^2+1 \leq n^2+n$$

$$\iff 1 \leq n$$

Como  $1 \leq n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{n^2+1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalmente, como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$  diverge.