

Series

martes, 24 de mayo de 2022

A partir de una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales, podemos formar una nueva sucesión sumando sus términos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la **suma parcial** S_n como

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

A la sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sumas parciales le llamaremos serie infinita o simplemente **serie** y la denotaremos como

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \quad a_1 + \dots + a_n + \dots \quad \text{o}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

* denota a una serie (sucesión de sumas parciales)

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L \in \mathbb{R}$, diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a L , en cuyo caso escribiremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = L.$$

* denota a un número real, (el límite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$)

* Estamos haciendo un doble uso de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Notación.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

Ejemplos

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} 1 \text{ diverge}$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

↑
límite
de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} 0$ converge a 0.
↑ sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \leftarrow$ sucesión armónica

3) Serie armónica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \dots$$

$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}} \quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}} \quad \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 8\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2}}$

Sea $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como $S_{2^n} \geq 1 + n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{n}{2}$ y $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ (porque $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{n}{2} = \infty$).

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge

Dato:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4) Series geométricas $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ ($r \in \mathbb{R}$)

* Si $r=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ diverge.

$r=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 0$ converge a 0

$$\text{Sea } S_n = 1 + r + \dots + r^n = \sum_{k=0}^n r^k$$

$$\Rightarrow -r S_n = -r - r^2 - \dots - r^n - r^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

* Si $|r| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - 0}{1 - r}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r} \quad \text{si } |r| < 1 \quad (r \neq 0)$$