

## Longitud de curvas parametrizadas

martes, 31 de mayo de 2022

**Teorema.** Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas y no negativas en  $[a, b]$ .

Entonces para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$  y  $\|P\| < \delta$ , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{f(x_i) + g(y_i)} (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \sqrt{f(x) + g(x)} dx \right| < \varepsilon$$

para cualesquiera  $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ .

**Dem.** Sea  $\varepsilon > 0$ . Ya que  $f$  y  $g$  son continuas y no negativas en  $[a, b]$ , existen  $M_1 > 0$  y  $M_2 > 0$  tales que

$$0 \leq f(x) \leq \frac{M_1}{2} \quad \text{y} \quad 0 \leq g(y) \leq \frac{M_2}{2} \quad \text{p.c. } x, y \in [a, b]$$

Sea  $M = \max \{M_1, M_2\} > 0$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) + g(y) \leq \frac{M_1}{2} + \frac{M_2}{2} \leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M \quad \text{p.c. } x, y \in [a, b]$$

$$\Rightarrow f(x) + g(y) \in [0, M] \quad \text{p.c. } x, y \in [a, b].$$

Ahora bien, la función  $\sqrt{x}$  es uniformemente continua en  $[0, M]$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que si  $c, d \in [0, M]$  y  $|c - d| < \delta_1$  entonces

$$|\sqrt{c} - \sqrt{d}| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Similarmenete  $g$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ , por lo que existe  $\delta_2 > 0$  tal que si  $x, y \in [a, b]$  y  $|x - y| < \delta_2$  entonces

$$|g(x) - g(y)| < \delta_1.$$

$$\Rightarrow | (f(x) + g(x)) - (f(x) + g(y)) | = | g(x) - g(y) | < \delta_1,$$

$$\text{donde } f(x) + g(x), f(x) + g(y) \in [0, M]$$

$$\Rightarrow \left| \sqrt{f(x) + g(x)} - \sqrt{f(x) + g(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (1)$$

Por otro lado, como  $\sqrt{f+g}$  es continua en  $[a, b]$  existe  $\delta_3 > 0$  tal que si  $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$  y  $\|P\| < \delta_3$ , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{f(x_i) + g(x_i)} (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \sqrt{f(x) + g(x)} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

para cualquier  $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Definimos  $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\} > 0$  y sea  $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$  tal que  $\|P\| < \delta$ , entonces

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{f(x_i) + g(y_i)} (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \sqrt{f(x) + g(x)} dx \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{f(x_i) + g(y_i)} (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \sqrt{f(x_i) + g(x_i)} (t_i - t_{i-1}) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{f(x_i) + g(x_i)} (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \sqrt{f(x) + g(x)} dx \right| \\ & \stackrel{(2)}{<} \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{f(x_i) + g(y_i)} (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \sqrt{f(x_i) + g(x_i)} (t_i - t_{i-1}) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ & = \left| \sum_{i=1}^n [\sqrt{f(x_i) + g(y_i)} - \sqrt{f(x_i) + g(x_i)}] (t_i - t_{i-1}) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ & \leq \sum_{i=1}^n |\sqrt{f(x_i) + g(y_i)} - \sqrt{f(x_i) + g(x_i)}| (t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ & \stackrel{(1)}{<} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\therefore$  El teorema se cumple  $\blacksquare$

**Definición.** Sean  $u$  y  $v$  funciones continuas en  $[a, b]$ . Decimos que el conjunto

$$\mathcal{C} = \{ (u(t), v(t)) \mid t \in [a, b] \}$$

es una curva parametrizada mediante  $u$  y  $v$ , siendo

$$x = u(t) \quad y = v(t)$$

las ecuaciones paramétricas de  $\mathcal{C}$ .

**Ejemplos.**

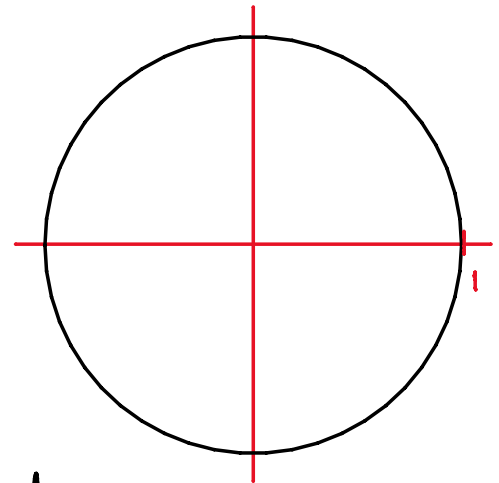
1) Sea  $\mathcal{C} = \{ (\cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi] \}$

Recordemos que la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  representa a la circunferencia unitaria centrada en  $(0, 0)$ . Luego

$$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$\Rightarrow$  cada punto de  $\mathcal{C}$  es un punto de la circunferencia

Se puede probar que  $x = \cos t$  y  $y = \sin t$  parametrizan a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$



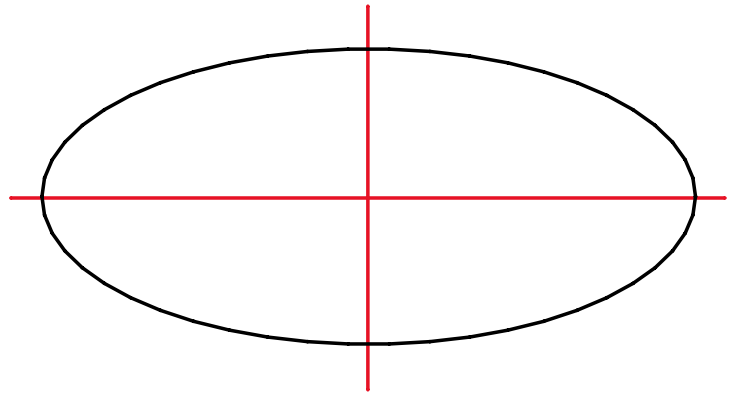
2) Consideremos la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las ecuaciones

$$x = a \cdot \cos t \quad y = b \cdot \sin t$$

con  $t \in [a, 2\pi]$  parametrizan a esta elipse.

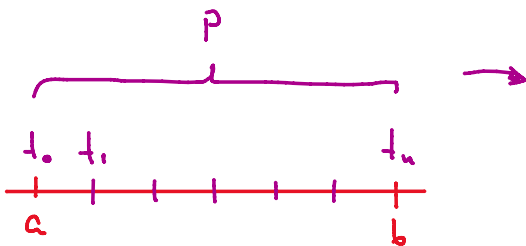


**Definición.** Consideremos una curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por las ecuaciones  $x = u(t)$  y  $y = v(t)$  con  $t \in [a, b]$ , y sea  $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ . Llamamos longitud de  $\mathcal{C}$  respecto a  $P$  a la suma

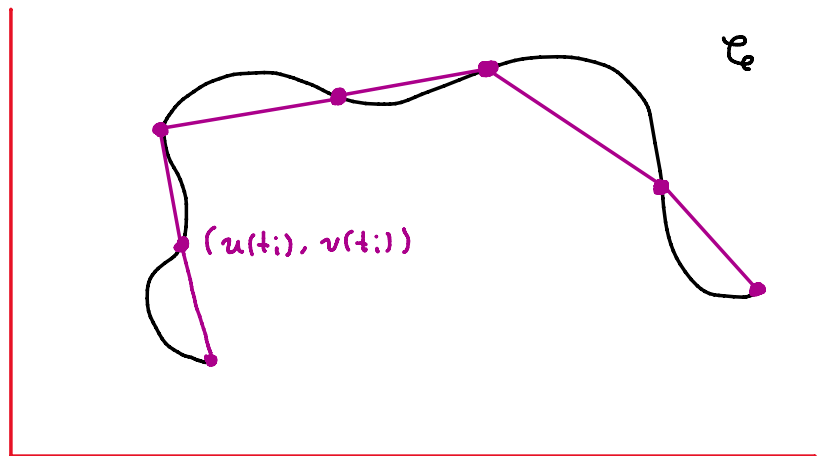
$$l(\mathcal{C}, P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{[u(t_i) - u(t_{i-1})]^2 + [v(t_i) - v(t_{i-1})]^2},$$

y definimos la longitud de  $\mathcal{C}$  en  $[a, b]$  como

$$l_{[a, b]}(\mathcal{C}) = \sup \{ l(\mathcal{C}, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a, b]} \}.$$



$l(\mathcal{C}, P)$  mide la longitud de la curva rectilínea unida



~ Entre más puntos tenga  $P$ , la longitud de la curva rectilínea aproximará mejor la longitud de  $C$ .

~ Si  $P \subset Q$  entonces  $L(C, P) \leq L(C, Q)$

**Teorema.** Si  $C$  es una curva parametrizada por las funciones  $u$  y  $v$  en  $[a, b]$  y  $u'$  y  $v'$  son continuas en  $[a, b]$ , entonces

$$L_{[a, b]}(C) = \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2} dx$$

**Dem.** Sea  $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ . Ya que  $u$  es derivable en  $[t_{i-1}, t_i]$  por TVM existe  $x_i \in (t_{i-1}, t_i)$  tal que

$$\frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = u'(x_i)$$

$$\Rightarrow u(t_i) - u(t_{i-1}) = u'(x_i) (t_i - t_{i-1}) \quad \text{p.c. } i \in \{1, \dots, n\}$$

Similarmente para  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe  $y_i \in (t_{i-1}, t_i)$  tal que

$$v(t_i) - v(t_{i-1}) = v'(y_i) (t_i - t_{i-1}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(C, P) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[u(t_i) - u(t_{i-1})]^2 + [v(t_i) - v(t_{i-1})]^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[u'(x_i)(t_i - t_{i-1})]^2 + [v'(y_i)(t_i - t_{i-1})]^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[(u'(x_i))^2 + (v'(y_i))^2] (t_i - t_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[u'(x_i)]^2 + [v'(y_i)]^2} (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Por esta igualdad y el teorema anterior existe  $\delta > 0$  tal que si  $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$  y  $\|P\| < \delta$  entonces

$$\left| l(c, P) - \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dado que  $l_{[a,b]}(c) = \sup \{ l(c, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \}$ , existe  $Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$  tal que

$$l_{[a,b]}(c) - \frac{\varepsilon}{2} < l(c, Q).$$

Sea  $Q' \in \mathcal{P}_{[a,b]}$  un refinamiento de  $Q$  tal que  $\|Q'\| < \delta$

$$\Rightarrow l(c, Q) \leq l(c, Q')$$

$$\Rightarrow l_{[a,b]}(c) - \frac{\varepsilon}{2} \leq l(c, Q')$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq l_{[a,b]}(c) - l(c, Q') < \frac{\varepsilon}{2}$$

↑  
porque  $l(c)$  es el supremo

$$\Rightarrow \left| l_{[a,b]}(c) - \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2} dx \right|$$

$$\leq \left| l_{[a,b]}(c) - l(c, Q') \right|$$

$$+ \left| l(c, Q') - \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2} dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| l_{[a,b]}(c) - \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2} dx \right| < \varepsilon \quad \text{p. c. } \varepsilon > 0$$

$$\Leftrightarrow L_{[a,b]}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{[u'(x)]^2 + [v'(x)]^2} dx$$

**Ejemplo.** Consideremos la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  parametrizada por  $x = \cos t$  y  $y = \sin t$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ , y notemos que  $\cos t$  y  $\sin t$  son de clase  $C^1$  en  $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_{[0, 2\pi]}(\mathcal{C}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[\cos'(x)]^2 + [\sin'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} dx \\ &= \int_0^{2\pi} dx = \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Determinar si las siguientes series convergen o divergen:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Notemos que  $\frac{n^3}{n!} > 0$  p. c.  $n \in \mathbb{N}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot \cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = 0 < 1 \end{aligned}$$

Se sigue del criterio del cociente que la serie diverge.