

Centros de masa y crecimiento de poblaciones

jueves, 26 de mayo de 2022

Si la región entre la gráfica de una función continua y no negativa f y el eje X en $[a, b]$ representa la forma de una lámina con densidad constante entonces las coordenadas del centro de masa de la lámina son

$$x^* = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad y \quad y^* = \frac{\int_a^b [f(x)]^2 dx}{2 \int_a^b f(x) dx}.$$

Ejemplo. Determine el centro de masa de una lámina delgada con densidad constante determinada por el eje X y la gráfica de $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

S.1. $f(x) = 0 \iff -x^2 + 6x - 8 = 0$

$$\iff x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$$

$$\iff x = 2 \quad o \quad x = 4$$

Además se comprueba que $f(x) > 0$ p.c. $x \in [2, 4]$.

$$\begin{aligned} - \int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 (-x^2 + 6x - 8) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right] \Big|_2^4 \\ &= \left[-\frac{(4)^3}{3} + 3(4)^2 - 8(4) \right] - \left[-\frac{(2)^3}{3} + 3(2)^2 - 8(2) \right] \\ &= \left[-\frac{64}{3} + 48 - 32 \right] - \left[-\frac{8}{3} + 12 - 16 \right] \\ &= -\frac{64}{3} + 16 - \left[-\frac{8}{3} - 4 \right] = 20 - \frac{56}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

$$- \int_2^4 x f(x) dx = \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2 \right] \Big|_2^4 = \underline{\underline{4}}$$

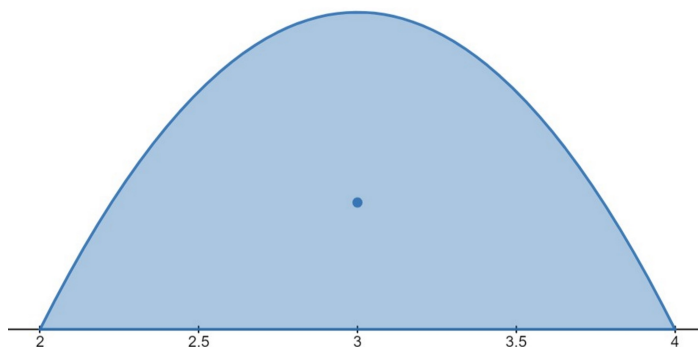
$$- \int_2^4 [f(x)]^2 dx = \int_2^4 (-4 - 12x + 12x^2 - 8x^2 + 64x - 64) dx$$

$$\begin{aligned}
 - \int_2^4 (f(x))^2 dx &= \int_2^4 (x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64) dx \\
 &= \left[\frac{x^5}{5} - 3x^4 + \frac{52x^3}{3} - 48x^2 + 64x \right]_2^4 = \underline{\underline{\frac{16}{15}}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{\int_2^4 x f(x) dx}{\int_2^4 f(x) dx} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3$$

$$y^* = \frac{\int_2^4 (f(x))^2 dx}{2 \int_2^4 f(x) dx} = \frac{\frac{16}{15}}{\frac{8}{3}} = \frac{16 \cdot 3}{15 \cdot 8} = \frac{2}{5}$$

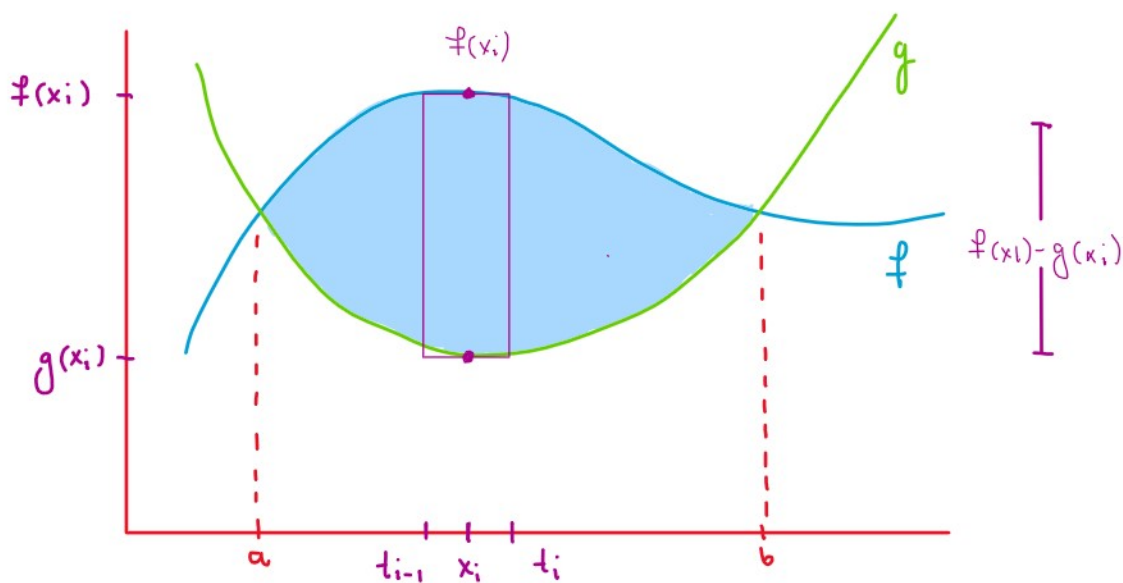
$\therefore (3, \frac{2}{5})$ es el centro de masa de la lámina.



- Centro de masa de una región entre dos curvas.

Supongamos que dos funciones continuas y no negativas f y g se intersecan en $x=a$ y $x=b$, de manera que $f(x) \geq g(x)$ para cada $x \in [a,b]$.

¿Cómo encontramos el centro de masa de una lámina cuya forma está representada por la región entre las gráficas de f y g ?



Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$; elegimos $x_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$ p. c. $i \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces podemos aproximar la región azul mediante los n rectángulos que tienen a los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ como bases y cuyas alturas miden $f(x_i) - g(x_i)$. Notemos que los centros de masa de estas rectángulos son

$$\left(x_i, \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2} \right)$$

Además cada rectángulo tiene masa

$$m_i = \delta V_i = \delta \cdot h \cdot A_i = \delta h (f(x_i) - g(x_i)) (t_i - t_{i-1})$$

$\nearrow$ densidad
 $\uparrow$ volumen
 $\uparrow$ anchura constante
 const.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i = \delta h \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)] (t_i - t_{i-1}), \quad P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$$

representa la masa del sistema de rectángulos

Cuando $\|P\| \rightarrow 0$, la suma de Riemann de la izquierda aproxima a

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

$$\Rightarrow \delta h \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ es la masa de la lámina con densidad constante}$$

El momento de masa del sistema con respecto al eje Y está dado por

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = \delta h \sum_{i=1}^n [x_i f(x_i) - x_i g(x_i)] (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \delta h \int_a^b (x f(x) - x g(x)) dx \text{ es el momento de masa de la lámina con respecto al eje Y.}$$

Similarmente el momento de masa respecto al eje X está dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i y_i &= \delta h \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2} \right) [f(x_i) - g(x_i)] (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\delta h}{2} \sum_{i=1}^n [(f(x_i))^2 - (g(x_i))^2] (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta h \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx \text{ es el momento de masa de la lámina con respecto al eje X}$$

Entonces

$$x^* = \frac{\int_a^b (x f(x) - x g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} \quad , \quad y^* = \frac{\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}$$

son las coordenadas del centro de masa de la lámina.

Ejemplo. Encontrar el centro de masa de la lámina con densidad uniforme delimitada por las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

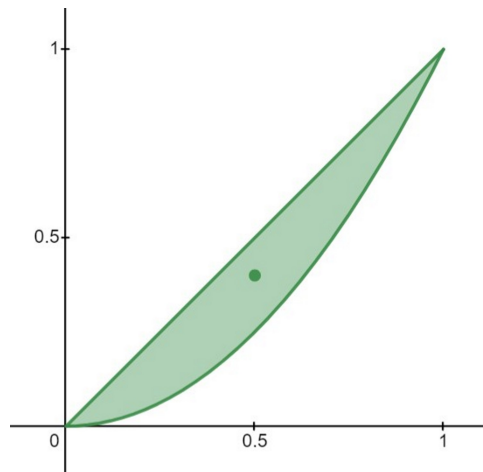
Sol. Sabemos que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$ o $x = 1$

Además $f(x) \geq g(x)$ para cada $x \in [0, 1]$.

$$\Rightarrow x^* = \frac{\int_0^1 (x f(x) - x g(x)) dx}{\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx} = \frac{\int_0^1 (x^2 - x^3) dx}{\int_0^1 (x - x^2) dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1}{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1} \\ = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$y^* = \frac{\int_0^1 (f^2(x) - g^2(x)) dx}{2 \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx} = \frac{\int_0^1 (x^2 - x^4) dx}{2 \left(\frac{1}{6} \right)} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1}{\frac{1}{3}} \\ = 3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{2}{5}$$

$\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right)$ es el centro de masa de la lámina



- Crecimiento de poblaciones (modelo de Malthus).

Supongamos que la función continua P representa el número de habitantes de una población en un tiempo t (años). El modelo de Malthus establece que si en un periodo de tiempo las tasas de natalidad y mortalidad de la población son constantes, entonces la velocidad con la que crece la población al tiempo t es proporcional a la población actual, es decir,

$$P'(t) = k \cdot P(t) \quad \text{para alguna } k \in \mathbb{R}.$$

Assumiendo que en este periodo de tiempo la población nunca es 0:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k$$

$$\Rightarrow \log(P(t)) = \int \frac{P'(t)}{P(t)} dt = \int k dt = k \cdot t + c$$

$$\Rightarrow P(t) = e^{k \cdot t + c} = e^c \cdot e^{k \cdot t} = C \cdot e^{k \cdot t}$$

Si se conoce la población inicial P_0 en el tiempo $t_0 = 0$, entonces

$$P_0 = P(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = C$$

$$\therefore \boxed{P(t) = P_0 \cdot e^{k \cdot t}}$$

Para determinar la constante de proporcionalidad k necesitamos conocer la población P_1 en un tiempo $t_1 > t_0$:

$$P_1 = P(t_1) = P_0 \cdot e^{k \cdot t_1} \Rightarrow e^{k \cdot t_1} = \frac{P_1}{P_0}$$

$$\Rightarrow k \cdot t_1 = \log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$$

$$\therefore k = \frac{1}{t_1} \log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$$

Ejemplo. En cierto pueblo habitaban 4000 personas en el año 1990, y para el año 2010 se alcanzó una población de 8000 personas. Estime la población del lugar en 2025 asumiendo que las tasas de natalidad y mortalidad en ese periodo de tiempo son constantes.

S.l. Año 1990 : $t_0 = 0$

Año 2010 : $t_1 = 20$

Año 2025 : $t_2 = 35$

Según el modelo, $k = \frac{1}{20} \log\left(\frac{8000}{4000}\right) = \frac{1}{20} \log(2)$

$$\Rightarrow P(35) = 4000 \cdot e^{\frac{1}{20} \log(2) \cdot 35} = 4000 \cdot e^{\frac{7}{4} \cdot \log(2)}$$

$$= 4000 \cdot (2)^{\frac{7}{4}} = 8000 \cdot 2^{\frac{3}{4}} \approx 13454.34$$

$\therefore$ Para el año 2025 habrá aproximadamente

13454 habitantes en el pueblo.