

Trabajo, momentos y centros de masa

miércoles, 25 de mayo de 2022

Trabajo.

Un objeto se desplaza en línea recta desde a hasta b .



Trabajo = Fuerza $\times$ distancia

Sea $W_a^b(f)$ el trabajo realizado por una función de fuerza f en el intervalo $[a, b]$. Esto cumple las siguientes propiedades:

~ Propiedad aditiva: si $a < c < b$ entonces

$$W_a^b(f) = W_a^c(f) + W_c^b(f)$$

~ Propiedad monótona: $f(x) \leq g(x)$ p.c. $x \in [a, b]$ entonces

$$W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$$

~ Fuerza constante: si $f(x) = c$ p.c. $x \in [a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$W_a^b(f) = c(b-a)$$

Supongamos que f es integrable en $[a, b]$ y sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$

$$\Rightarrow m_i \leq f(x) \leq M_i \quad \text{p.c. } x \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\Rightarrow m_i(t_i - t_{i-1}) = W_{t_{i-1}}^{t_i}(m_i) \leq W_{t_{i-1}}^{t_i}(f) \leq W_{t_{i-1}}^{t_i}(M_i) = M_i(t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}^{t_i}(f) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

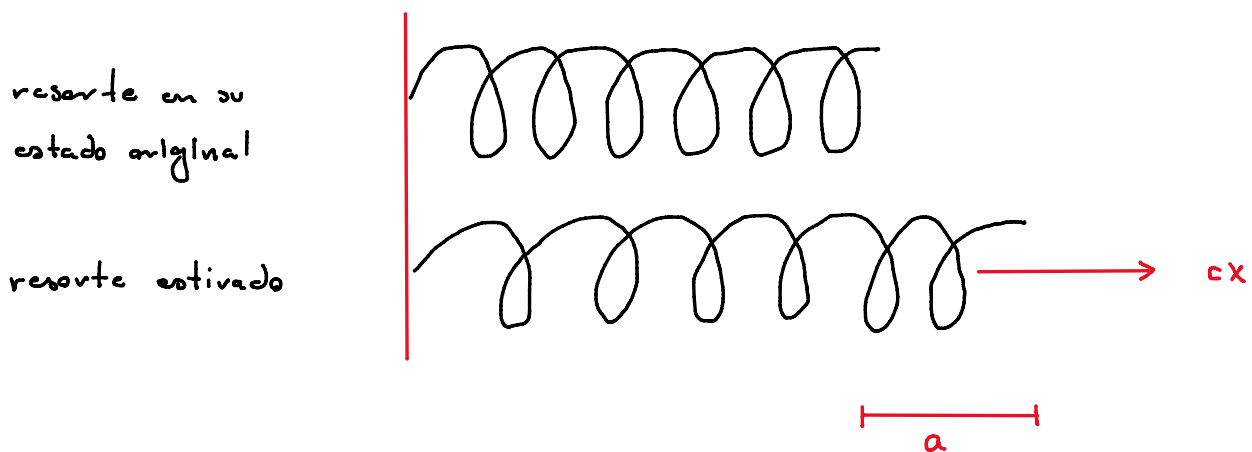
$$\Rightarrow L(f, P) \leq W_a^b(f) \leq U(f, P)$$

Pero $\int_a^b f(x) dx$ es el único número con esta propiedad

$$\therefore W_a^b(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Ejemplo. Supongamos que la fuerza necesaria para estirar un resorte de acero una longitud x mas allá de su longitud original es proporcional a x (ley de Hooke). Si el resorte esta orientado horizontalmente y la fuerza f actua hacia la derecha, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = cx$$



El trabajo necesario para estirar el resorte una longitud $a > 0$ es

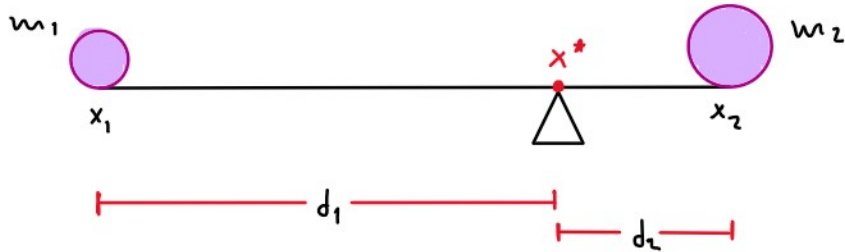
$$W_a^b(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b cx dx = \left[\frac{cx^2}{2} \right]_0^a = \frac{ca^2}{2}$$

$$\therefore W_a^b(f) = \frac{ca^2}{2}.$$

Cálculo de momentos y centros de masa

- Sistema unidimensional.

¿Dónde debe estar el punto de apoyo del columpio para que este equilibrado?



~ Ley de la palanca: $m_1 d_1 = m_2 d_2$

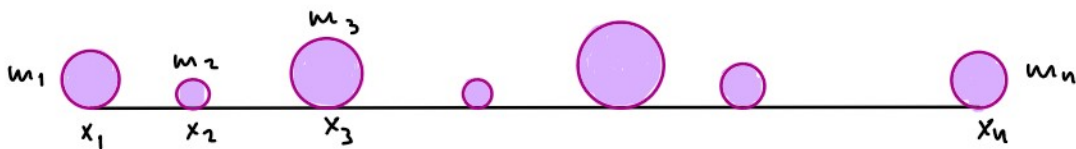
$$\Rightarrow m_1 (x^* - x_1) = m_2 (x_2 - x^*)$$

$$\Rightarrow m_1 (x^* - x_1) + m_2 (x^* - x_2) = 0 \quad (\square)$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

A x^* se le llama centro de masa del sistema.

¿Cómo encontramos el centro de masa de un sistema con n cuerpos de masas $m_1, \dots, m_n$?



Similar a $(\square)$ se cumple que

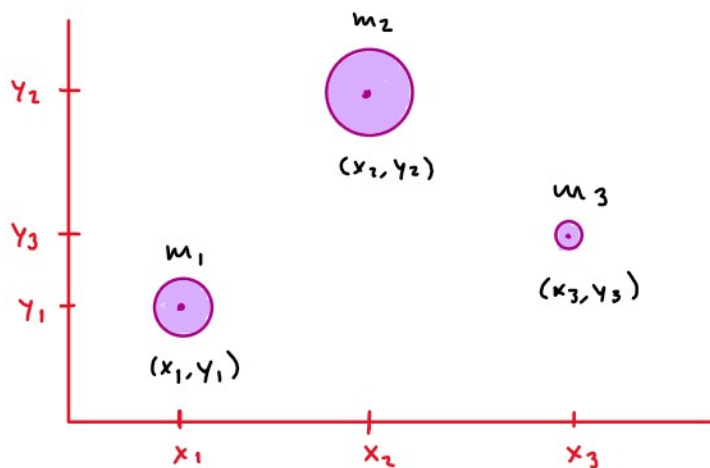
$$m_1 (x^* - x_1) + m_2 (x^* - x_2) + \dots + m_n (x^* - x_n) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i x^* = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$\therefore \boxed{x^* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}} \quad \leftarrow \text{masa del sistema}$$

A cada $m_i x_i$ se le conoce como el momento de la masa m_i respecto al origen, mientras que $\sum_{i=1}^n m_i x_i$ se le llama momento del sistema con respecto al origen

- Sistema de dos dimensiones.



¿Cómo encontramos el centro de masa de este sistema bidimensional?

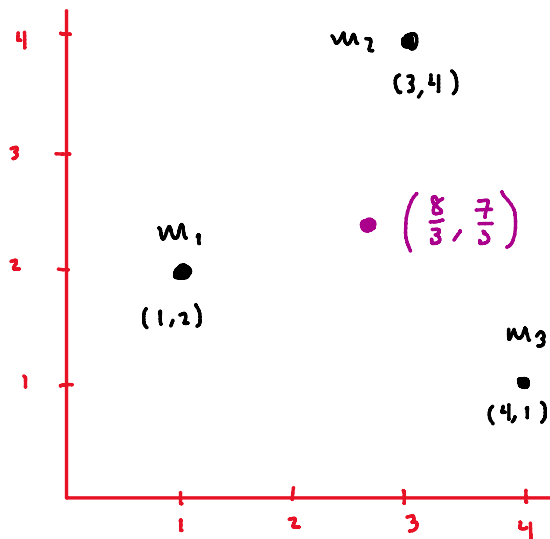
A cada número $m_i x_i$ ($m_i y_i$) lo llamaremos momento de la masa m_i con respecto al eje y (eje x).

Al número $\sum_{i=1}^n m_i x_i$ ($\sum_{i=1}^n m_i y_i$) le llamaremos momento del sistema respecto al eje y (eje x).

$$\Rightarrow \underline{x^*} = \frac{\text{momento del sistema respecto al eje } y}{\text{masa del sistema}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\text{momento del sistema respecto al eje}}{\text{masa del sistema}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Ejemplo. Calcular el centro de masa y la masa del siguiente sistema:



$$m_1 = m_2 = m_3 = 2$$

Masa del sistema:

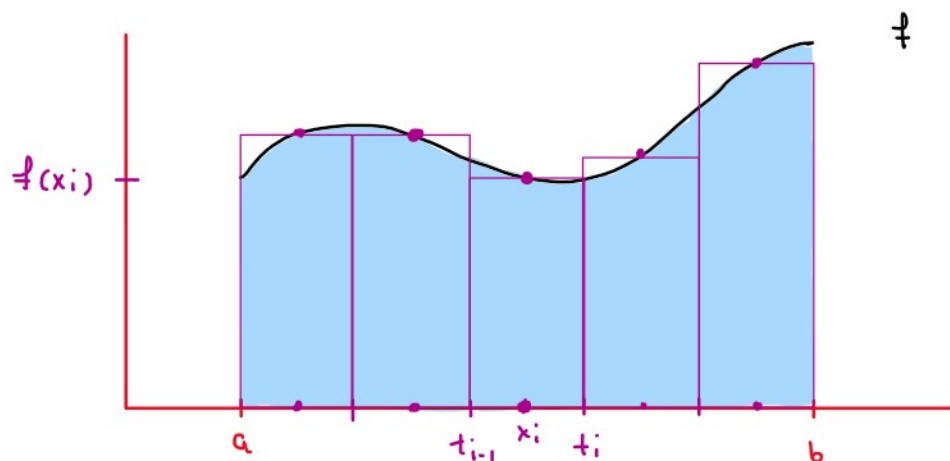
$$m_1 + m_2 + m_3 = \underline{6}$$

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{6} = \frac{7}{3}$$

$\Rightarrow$ El centro de masa del sistema es $(\frac{8}{3}, \frac{7}{3})$

Sea f una función continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$, y supongamos que la región entre la gráfica de f y el eje x en $[a, b]$ representa la forma de una lámina uniforme (de densidad constante). ¿Cómo encontramos las coordenadas del centro de masa de esta lámina?



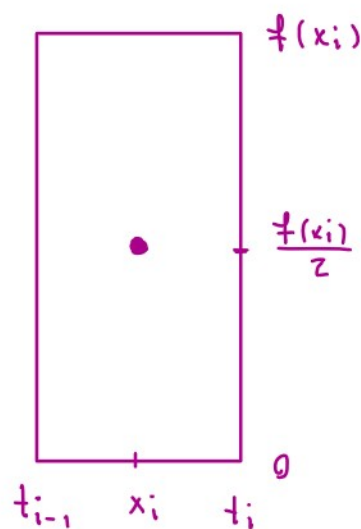
Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Definimos $x_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$

y consideremos la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1}).$$

En cada rectángulo de base $[t_{i-1}, t_i]$ y altura $f(x_i)$ las coordenadas de su centro de masa son

$$\left(x_i, \frac{f(x_i)}{2} \right) \quad (*)$$



Calcularemos el centro de masa de la región formada por todas estas rectángulos, tomando las puntas $(*)$ como representantes del sistema. Cuando $\|P\| \rightarrow 0$, la región formada por estas rectángulos se aproxima a la forma de la lámina.

Si cada rectángulo tiene densidad constante δ y anchura constante h , sabemos que

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

$$\Rightarrow m_i = \delta V_i = \delta \cdot h \cdot A_i = \delta h \cdot f(x_i) (t_i - t_{i-1})$$

↑
masa del
i-ésimo
rectángulo

↑
volumen
i-ésimo
rectángulo

↑
área
i-ésimo
rectángulo

$$\Rightarrow \text{masa del sistema: } \sum_{i=1}^n m_i = \delta h \sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1})$$

Cuando $\|P\| \rightarrow 0$, esta suma de Riemann aproxima a $\delta h \int_a^b f(x) dx$

$$\Rightarrow \delta h = \int_a^b f(x) dx \text{ es la masa del sistema}$$

$$\text{Además } \sum_{i=1}^n m_i x_i = \delta h \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) (t_i - t_{i-1}),$$

$$\text{y cuando } \|P\| \rightarrow 0 \text{ esta suma aproxima a } \delta h = \int_a^b x f(x) dx.$$

$$\text{Similarmente } \sum_{i=1}^n m_i y_i = \delta h \sum_{i=1}^n y_i f(x_i) (t_i - t_{i-1})$$

$$(*) = \frac{\delta h}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_i)]^2 (t_i - t_{i-1}),$$

donde esta suma aproxima a $\frac{\delta h}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx$ cuando $\|P\| \rightarrow 0$.

$$\therefore \underline{x^*} = \frac{\delta h \int_a^b x f(x) dx}{\delta h \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad y$$

$$\underline{y^*} = \frac{\frac{\delta h}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\delta h \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b [f(x)]^2 dx}{2 \int_a^b f(x) dx}$$

son las coordenadas del centro de masa de la lámina.