

Teorema. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una Función continua.

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n F(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b F(x) dx \right| < \varepsilon.$$

para cualquier suma de Riemann Formada eligiendo $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Teorema. (NA) Si F y g son Funciones continuas en $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ y $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n F(x_i)g(y_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b F(x)g(x) dx \right| < \varepsilon$$

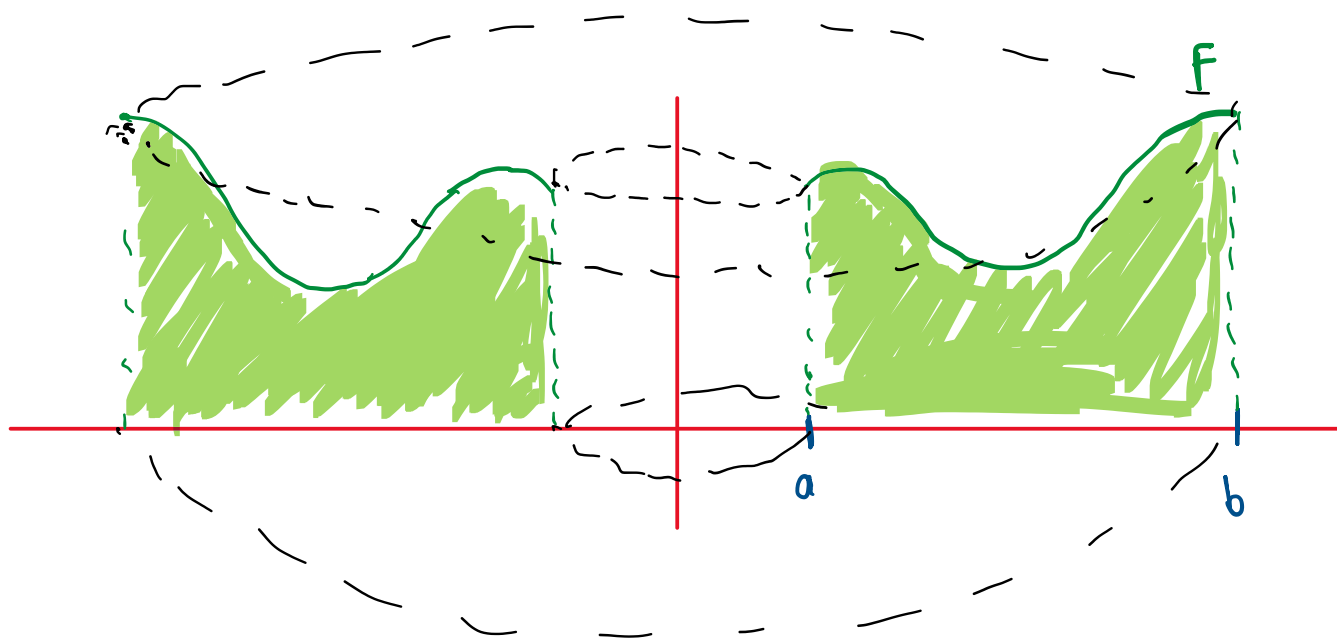
para cualesquiera $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i \in \{1, \dots, n\}$).

A las sumas de la forma $\sum_{i=1}^n F(x_i)g(y_i)(t_i - t_{i-1})$ les llamaremos "sumas de no Riemann".

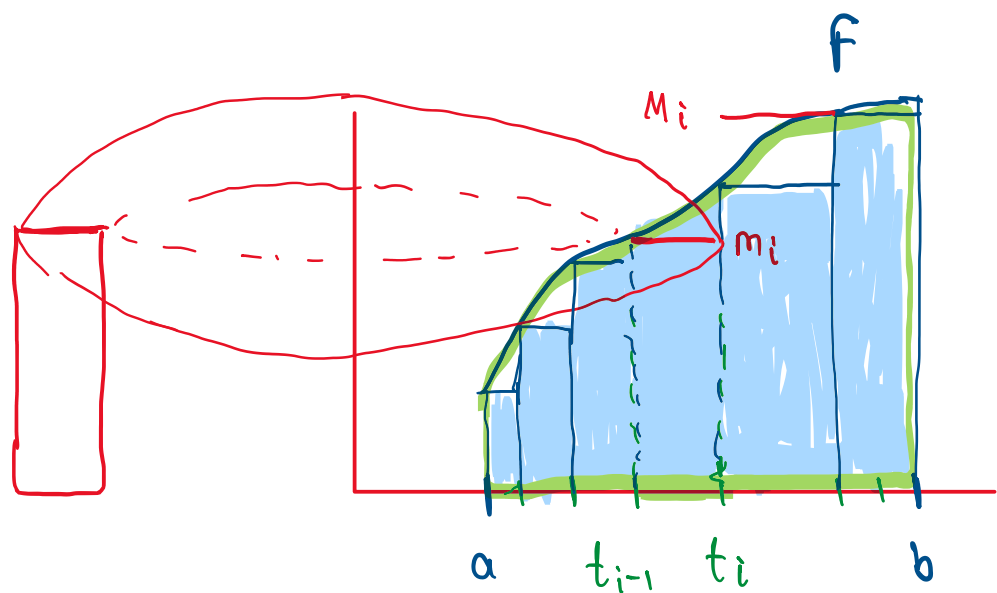
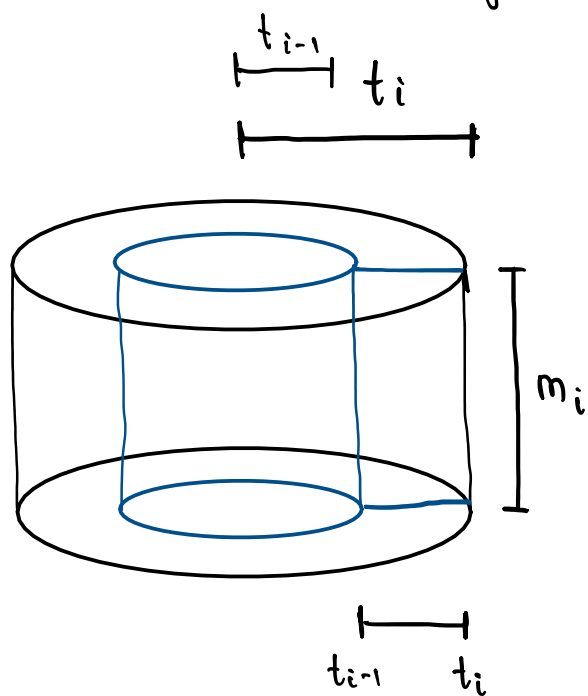
El resultado anterior nos dice que si F y g son continuas en $[a, b]$, entonces podemos aproximar el valor de $\int_a^b Fg$ por medio de sumas de no Riemann haciendo que $\|P\| \rightarrow 0$.

- Volumen de un sólido de revolución (al rotar alrededor del eje y).

Sea F una función continua en $[a, b]$, donde $0 \leq a < b$.



Queremos calcular el volumen del sólido obtenido al rotar la región que se encuentra entre la gráfica de F y el eje x en el intervalo $[a, b]$ alrededor del eje y .



$$V = \pi t_i^2 m_i - \pi t_{i-1}^2 m_i$$

$$V = \pi (t_i^2 - t_{i-1}^2) m_i$$

Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Como $L(F, P)$ es menor o igual al área de $U(F, P)$ mayor

la región que se va a rotar alrededor del eje y , entonces el volumen del sólido generado al rotar los rectángulos de base $[t_{i-1}, t_i]$ y altura m_i es menor o igual al volumen V que queremos calcular.

Como F es continua en $[t_{i-1}, t_i]$, entonces F alcanza su valor mínimo en $[t_{i-1}, t_i] \Rightarrow$ existe $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ t.q. $F(x_i) = m_i$. mínimo
máximo

El volumen obtenido al girar los rectángulos es:

$$\sum_{i=1}^n \pi (t_i^2 - t_{i-1}^2) M_i = \pi \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) (\underline{t_{i-1}} + \underline{t_i}) F(x_i)$$

$$= \pi \left[\sum_{i=1}^n \underline{t_{i-1}} F(x_i) (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \underline{t_i} F(x_i) (t_i - t_{i-1}) \right]$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 x $F(x)$ x $F(x)$

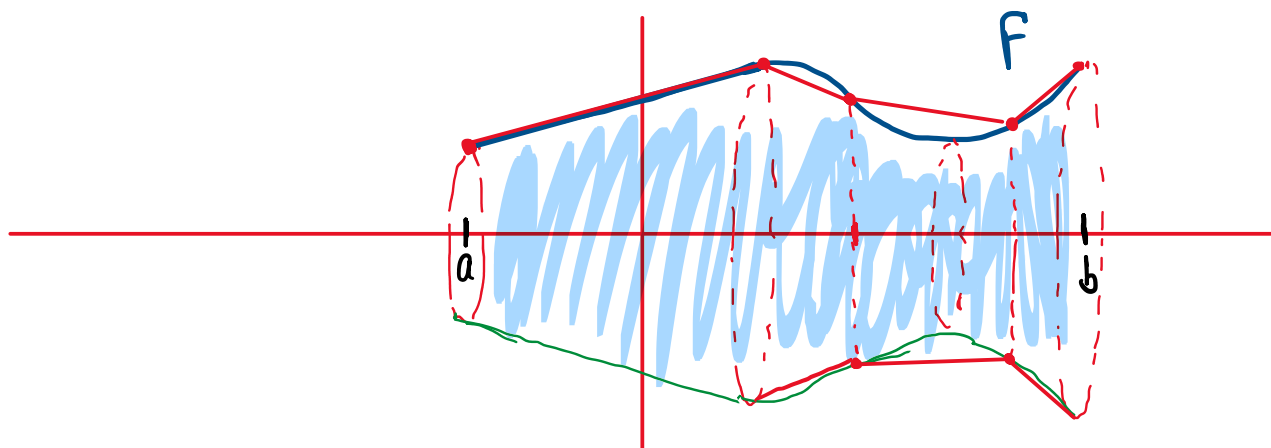
Notemos que las dos sumas anteriores son "sumas de no Riemann" para las funciones x y $F(x)$. Como $g(x) = x$ y $F(x)$ son continuas, por el teorema NR sabemos que estas sumas se aproximan a $\int_a^b x F(x) dx$ cuando $\|P\| \rightarrow 0$.

Como esto se obtiene al comenzar con sumas inferiores y con sumas superiores, concluimos que

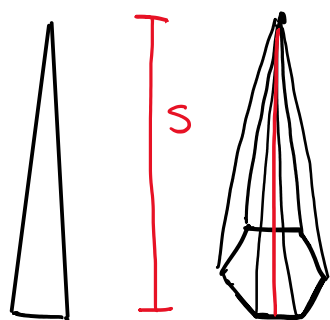
$$V = 2\pi \int_a^b x F(x) dx$$

rotación alrededor
del eje y .

Área lateral (rotación con respecto al eje x)



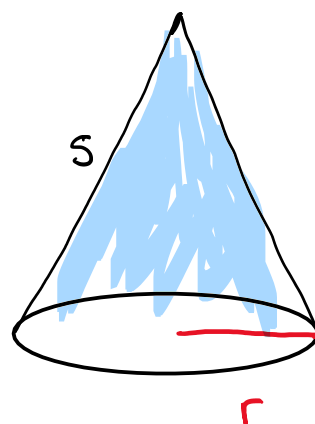
Sea F una función no negativa de clase C^1 en un intervalo $[a, b]$.
Queremos calcular el área de la superficie obtenida al rotar la gráfica de F alrededor del eje x .



Pirámide
poligonal

Área lateral

$$A = \frac{P s}{2}$$



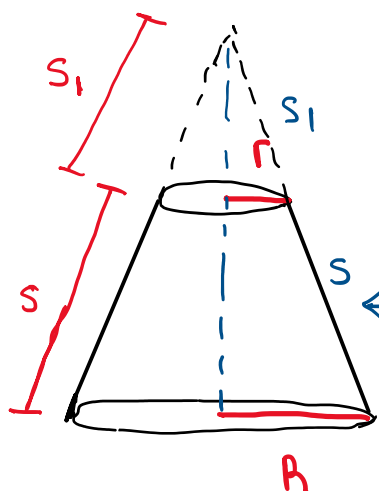
$$A = \pi r s$$

$$A = \frac{2 \pi r s}{2}$$

$$A = \pi r s$$

área lateral.

P = perímetro de la base



Área

$$A = \pi R (s + s_1) - \pi r s_1$$

$$= \pi R s + \pi (R - r) s_1$$

$$= \pi R s + \pi r s$$

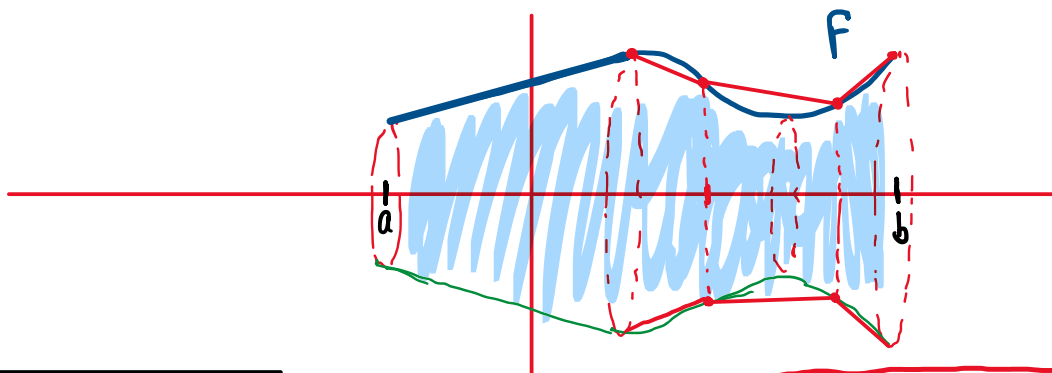
$$A = \pi (R + r) s$$

Área lateral
del cono truncado

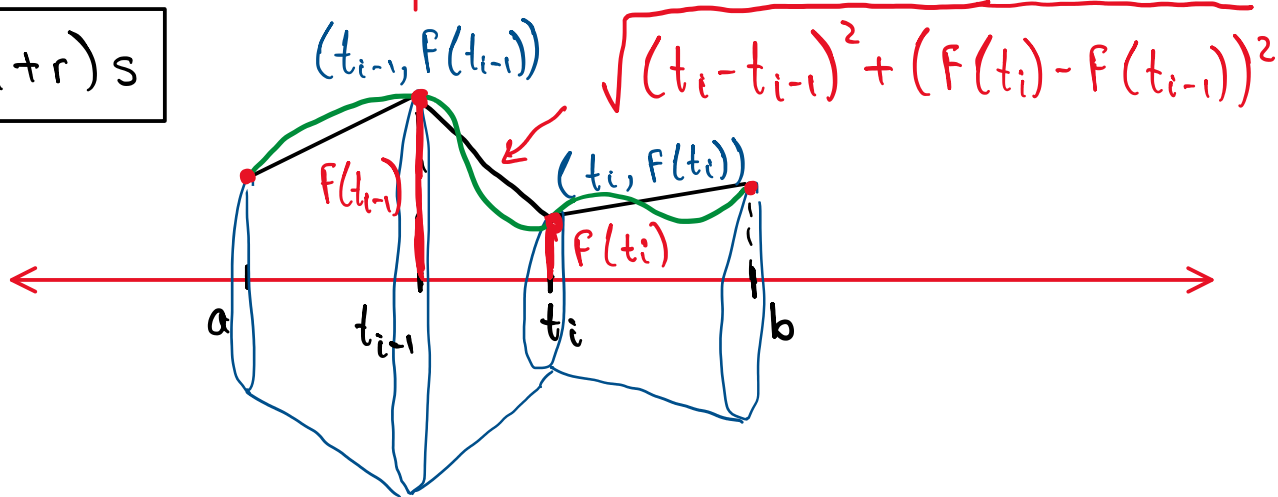
$$\frac{s_1}{r} = \frac{s + s_1}{R}$$

$$R s_1 = r s + r s_1$$

$$s_1 (R - r) = r s$$



$$A = \pi (R+r) s$$



Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \pi [F(t_{i-1}) + F(t_i)] \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (F(t_i) - F(t_{i-1}))^2} \\
 &= \sum_{i=1}^n \pi [F(t_{i-1}) + F(t_i)] \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 \left(1 + \left(\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 \right)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \pi [F(t_{i-1}) + F(t_i)] (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right)^2} \\
 &= \sum_{i=1}^n \pi [\underline{F(t_{i-1})} + \underline{F(t_i)}] (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + [F'(x_i)]^2} \quad \begin{array}{l} \text{(usando el T.V.M.)} \\ x_i \in (t_{i-1}, t_i) \end{array} \\
 &= \pi \left[\sum_{i=1}^n \underbrace{F(t_{i-1})}_{\uparrow F(x)} \underbrace{\sqrt{1 + [F'(x_i)]^2}}_{\uparrow \sqrt{1 + F'(x)^2}} (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \underbrace{F(t_i)}_{\uparrow F(x)} \underbrace{\sqrt{1 + [F'(x_i)]^2}}_{\uparrow \sqrt{1 + F'(x)^2}} (t_i - t_{i-1}) \right]
 \end{aligned}$$

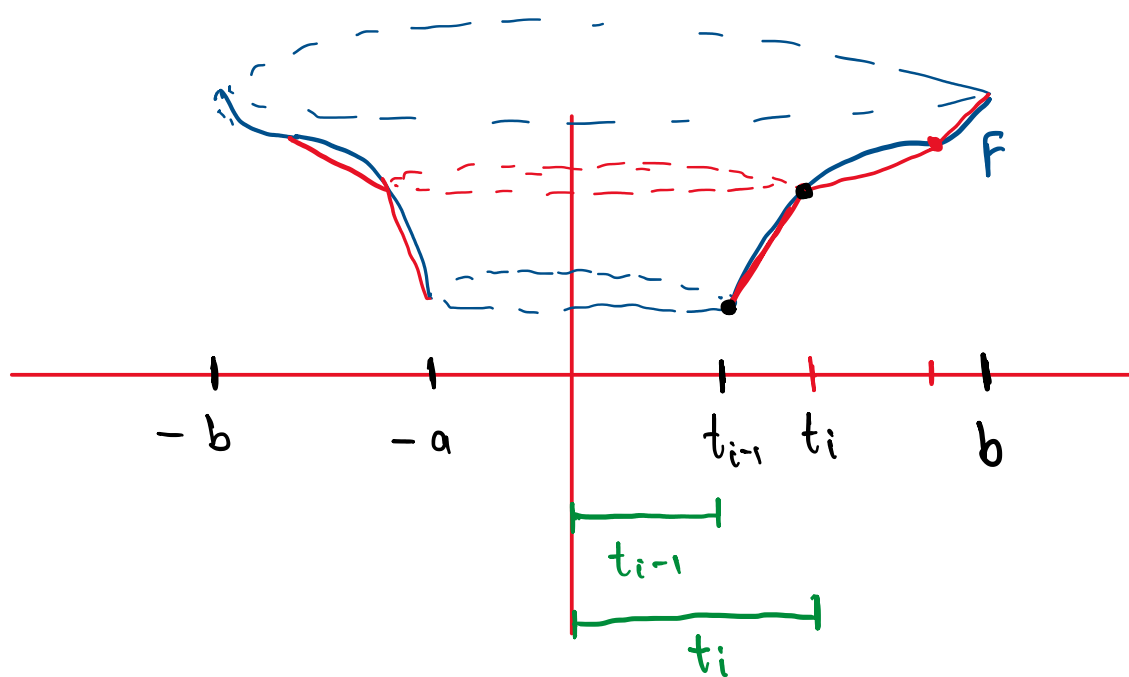
Notemos que las dos sumas anteriores son "sumas de no Riemann" para las funciones F y $\sqrt{1+(F')^2}$. Como estas funciones son continuas (porque F' es continua), estas sumas se aproximan a $\int_a^b F(x) \sqrt{1+(F'(x))^2} dx$ cuando $\|P\| \rightarrow 0$ (teorema NR).

Concluimos que

$$A = 2\pi \int_a^b F(x) \sqrt{1+(F'(x))^2} dx$$

Área lateral (rotación con respecto al eje y).

Sea F una función de clase C^1 en $[a, b]$, donde $0 \leq a < b$.



Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \pi [t_{i-1} + t_i] \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (F(t_i) - F(t_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \pi [t_{i-1} + t_i] \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 \left(1 + \left(\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 \right)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \pi [t_{i-1} + t_i] (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \pi [\underline{t_{i-1} + t_i}] (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + [F'(x_i)]^2} \quad \begin{array}{l} \text{(usando el T.V.M.)} \\ x_i \in (t_{i-1}, t_i) \end{array}$$

$$= \pi \left[\sum_{i=1}^n \underbrace{t_{i-1}}_x \underbrace{\sqrt{1 + [F'(x_i)]^2}}_{\sqrt{1 + F'(x)^2}} (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \underbrace{t_i}_x \underbrace{\sqrt{1 + [F'(x_i)]^2}}_{\sqrt{1 + F'(x)^2}} (t_i - t_{i-1}) \right]$$

Notemos que las dos sumas anteriores son "sumas de no Riemann" para las funciones Id y $\sqrt{1 + (F')^2}$. Como estas funciones son continuas (porque F' es continua), estas sumas se aproximan a $\int_a^b x \sqrt{1 + (F'(x))^2} dx$ cuando $\|P\| \rightarrow 0$ (teorema NA).

Concluimos que

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (F'(x))^2} dx$$