

Definición Sean $a < b$ y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$.

Definimos la "norma de P " como

$$\|P\| = \max \{t_i - t_{i-1} \mid i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Observación. Si $\delta > 0$, entonces

$$\|P\| < \delta \iff t_i - t_{i-1} < \delta \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}.$$

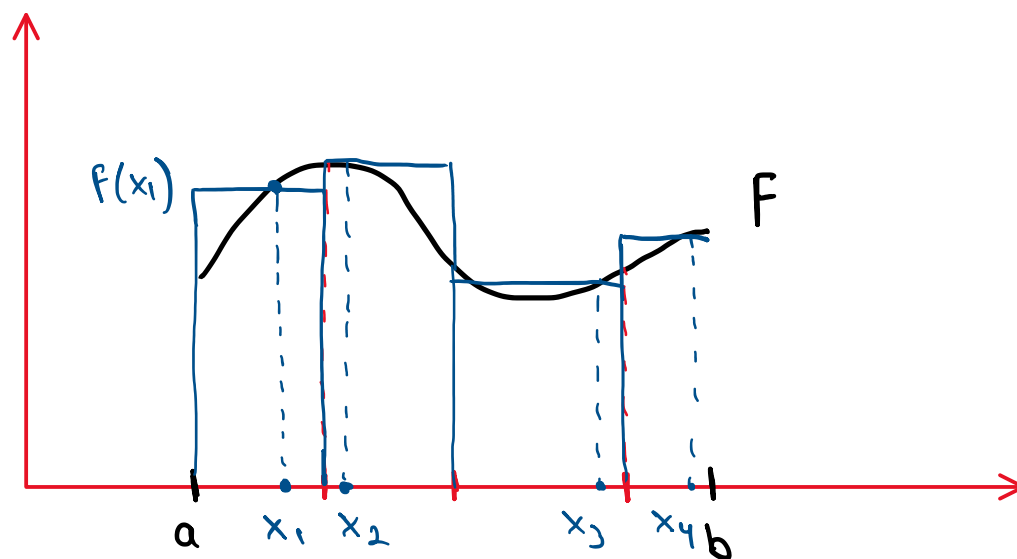
Teorema. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una Función continua.

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n F(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b F(x) dx \right| < \varepsilon.$$

para cualquier suma de Riemann Formada eligiendo $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

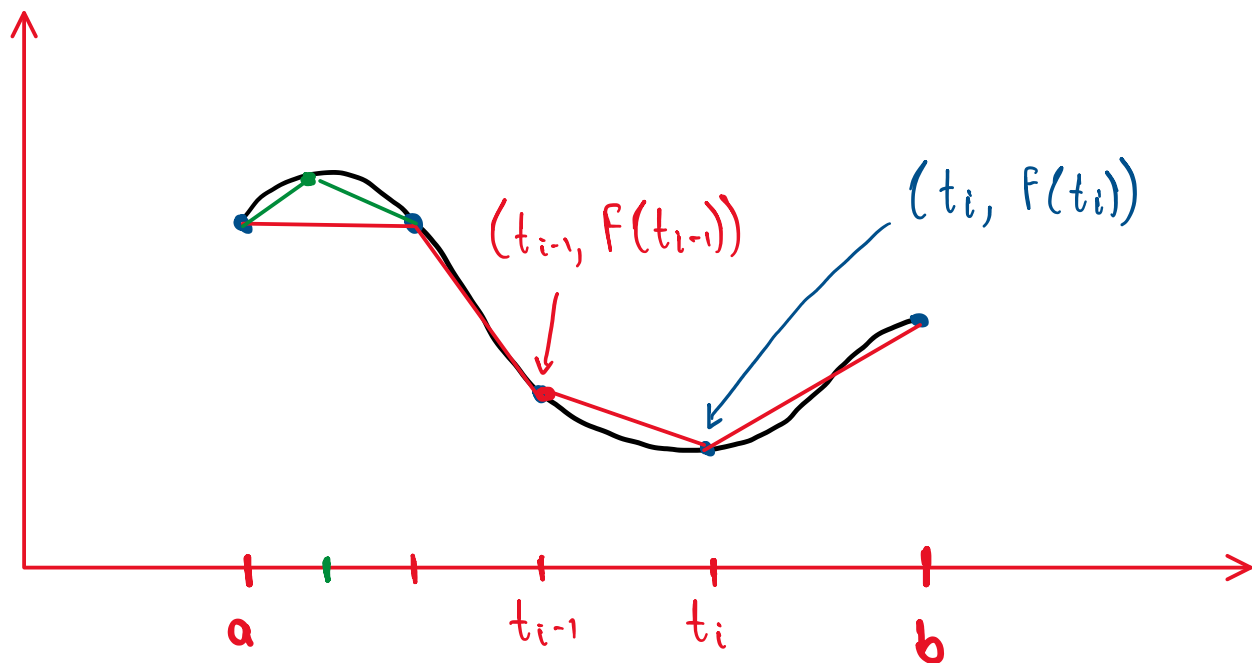
* (Esto también se cumple si F es integrable)



Longitud de curva

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 (con derivada continua).

Queremos calcular la longitud de la gráfica de f (en el intervalo $[a, b]$).



Para cada partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ definimos

$$l(f, P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n d((t_{i-1}, f(t_{i-1})), (t_i, f(t_i)))$$

Notemos que si $P, Q \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ y $P \subseteq Q \Rightarrow l(f, P) \leq l(f, Q)$ (ejercicio)
usar desigualdad del triángulo para la distancia en $\mathbb{R}^2$.

* Podemos definir la longitud de curva (de la gráfica de f en $[a, b]$) como

$$l_{[a, b]}(f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} l(f, P) ?$$

$$l_{[a, b]}(f) = \sup \{ l(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a, b]} \} ?$$

Definimos la longitud de la gráfica de f en $[a, b]$ como

$$l_{[a, b]}(f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} l(f, P) \quad (\text{en caso de existir}),$$

es decir, $\ell_{[a,b]}(f) = L \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad (\|P\| < \delta \Rightarrow |\ell(f, P) - L| < \varepsilon)$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} \ell(f, P) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 \left[1 + \left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 \right]} \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} \right)^2} \end{aligned}$$

Como f es continua $[t_{i-1}, t_i]$ y derivable en (t_{i-1}, t_i) , por el T.V.M. existe $x_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}} = f'(x_i)$$

$$\Rightarrow \ell(f, P) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}$$

Dado que $x_i \in (t_{i-1}, t_i)$ para cada i , entonces $\ell(f, P)$ es una suma de Riemann para la función $\sqrt{1 + (f')^2}$.

Como f' es continua, entonces $\sqrt{1 + (f')^2}$ también es continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el teorema (*), existe $\delta > 0$ tal que

si $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2} - \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \right| < \varepsilon,$$

es decir,

$$\left| \ell(F, P) - \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx \right| < \varepsilon$$

Por lo anterior,

si $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ es tal que $\|P\| < \delta \Rightarrow \left| \ell(F, P) - \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx \right| < \varepsilon$.

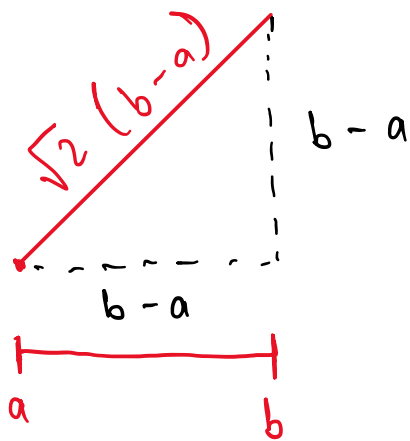
$$\therefore \ell_{[a,b]}(F) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \ell(F, P) = \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx$$

* **Nota:** Si definimos $\ell_{[a,b]}(F) = \sup \{ \ell(F, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \}$, también es posible demostrar que

$$\ell_{[a,b]}(F) = \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2} dx$$

1) Calcular la longitud de la gráfica de $F(x) = x$ en $[a, b]$.

$$\ell_{[a,b]}(F) = \int_a^b \sqrt{1 + (1)^2} dx = \int_a^b \sqrt{2} dx = \sqrt{2} (b - a)$$



2) Calcular la longitud de la gráfica de $F(x) = c$ en $[a, b]$.

$$l_{[a,b]}(F) = \int_a^b \sqrt{1 + 0^2} dx = \int_a^b dx = b - a.$$

3) Hallar la longitud de la gráfica de la función $y = \sqrt{x^3}$ en el intervalo $[0, 1]$.
 $= x^{3/2}$

$$l_{[0,1]}(F) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \int_1^{13/4} \sqrt{u} du$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2u^{3/2}}{3} \Big|_1^{13/4}$$

$$u = 1 + \frac{9}{4} x$$

$$du = \frac{9}{4} dx$$

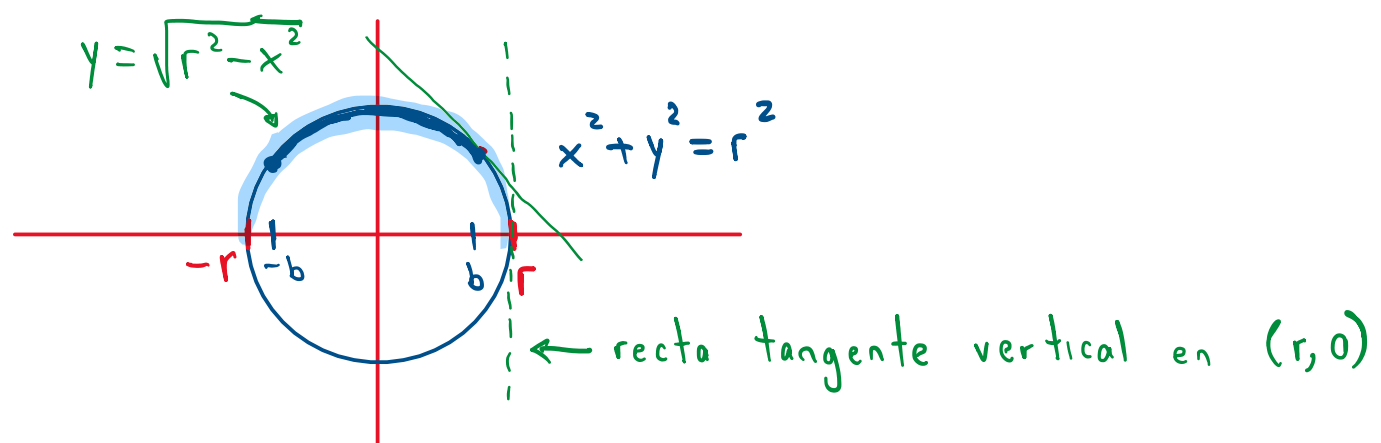
$$\frac{4}{9} du = dx$$

$$x=0 \rightarrow u=1$$

$$x=1 \rightarrow u = \frac{13}{4}$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - 1 \right]$$

4) Calcular el perímetro de una circunferencia de radio r .

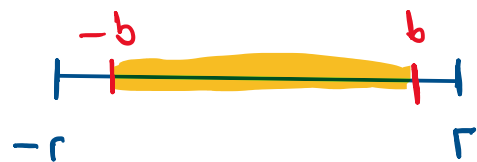


$$\text{Sea } f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad x \in (-r, r)$$

$$P = 2 \mathcal{L}_{[-r, r]}(f) = 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \right]^2} dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}} dx$$

$$= 2 \int_{-r}^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} dx = 2 \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} dx \quad (\text{Integral impropia})$$



$$= 2r \lim_{b \rightarrow r^-} \int_{-b}^b \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2r \lim_{b \rightarrow r^-} \int_{\arcsen(-\frac{b}{r})}^{\arcsen(\frac{b}{r})} \frac{\cancel{r \cos \theta} d\theta}{\cancel{r \cos \theta}} = 2r \cdot \lim_{b \rightarrow r^-} \theta \Big|_{\arcsen(-\frac{b}{r})}^{\arcsen(\frac{b}{r})}$$

$$\begin{cases} x = r \sen \theta \\ dx = r \cos \theta d\theta \\ \theta = \arcsen\left(\frac{x}{r}\right) \end{cases}$$

$$= 2r \lim_{b \rightarrow r^-} \left[\arcsen\left(\frac{b}{r}\right) - \arcsen\left(-\frac{b}{r}\right) \right] = 2r \left[\arcsen\left(\frac{r}{r}\right) - \arcsen\left(-\frac{r}{r}\right) \right]$$

$$\arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$= 2r \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \boxed{2r\pi}$$

* Si no nos damos cuenta de que es una integral impropia;

$$2 \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cancel{r \cos \theta} d\theta}{\cancel{r \cos \theta}} = 2r \cdot \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

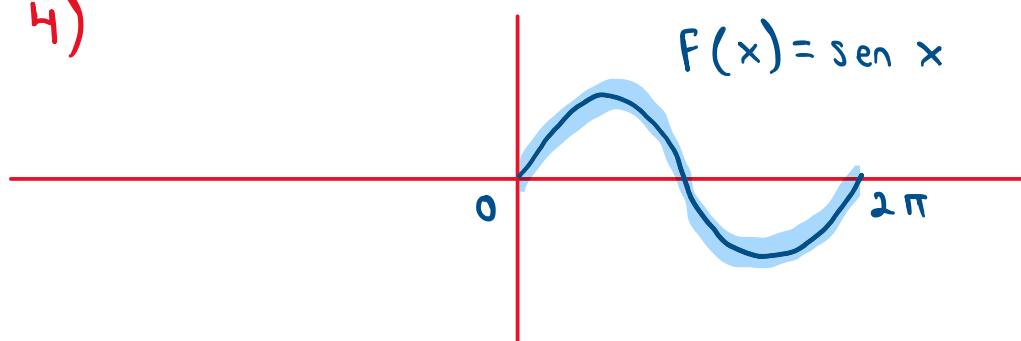
$$= 2r \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \boxed{2r\pi}$$

$x = r \sin \theta$
 $dx = r \cos \theta d\theta$
 $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$

$$x = -r \Rightarrow \theta = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = r \Rightarrow \theta = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

4)



$$l_{[0, 2\pi]}(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \approx 7.64$$