

Dudas y ejercicios de cálculo de áreas y volúmenes

jueves, 19 de mayo de 2022

Guía 4 Ejercicio 11 (c) Probar que $\pi \approx 3.14159$

De 11 (b) sabemos que $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$

$$\Rightarrow \pi = \underbrace{16 \arctan \frac{1}{5}}_{\text{se pueden aproximar con } P_{2n+1,0}} - \underbrace{4 \arctan \frac{1}{239}}_{\text{error}}$$

se pueden aproximar con $P_{2n+1,0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi &= 16 P_{2n+1,0} \left(\frac{1}{5} \right) + 16 R_{2n+1,0} \left(\frac{1}{5} \right) \\ &\quad - 4 P_{2m+1,0} \left(\frac{1}{239} \right) - 4 R_{2m+1,0} \left(\frac{1}{239} \right) \end{aligned}$$

aproximación error

Hay que determinar n y m de manera que el error $< 10^{-5}$

Ejercicio 12 (a) Muestra por inducción que $\phi^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$

$$\phi(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$k=1 \Rightarrow \phi'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

$$\Rightarrow \phi'(0) = a_1 = a_1 \cdot 1!$$

Ejercicio 7 (d)

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx &= \int \frac{3x^2 + 4x + 2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx \\ &= \int \frac{3x^2 + 4x + 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx - \int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx \end{aligned}$$

casi la derivada del denominador ✓ factorizar el denominador

Ejercicio 11 (j)

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx =$$

$$u = \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \Rightarrow dx = \underline{\hspace{2cm}} du$$

Ejercicio 6 (d)

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{\sec^2 \theta}{(\sec^2 \theta)^n} d\theta = \int \cos^n \theta d\theta =$$

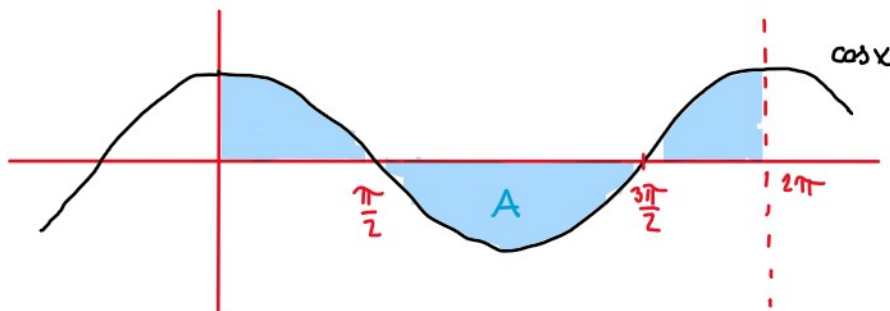
$$x = \tan \theta$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

↑
aplicar 6 (b)

Ejercicio. Hallar el área de la región limitada por las siguientes curvas

1) $f(x) = \cos x$, el eje x , el eje y y $x = 2\pi$



$$A = \int_0^{2\pi} \cos x dx = [\sin x] \Big|_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0 \quad \times$$

$$\cos x > 0 \text{ para } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \text{ y } \cos x \leq 0 \text{ para } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A &= \int_0^{2\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx \\
&= [\sin x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + [\sin x] \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\
&= [1 - 0] - [(-1) - 1] + [0 - (-1)] \\
&= 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}
\end{aligned}$$

En general, el área de la región comprendida entre las gráficas de f y g en $[a, b]$ está dada por $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

$$2) f(\theta) = 2 \sin \theta \quad \gamma \quad g(\theta) = 1$$

↓

$$r = 2 \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2r \sin \theta$$

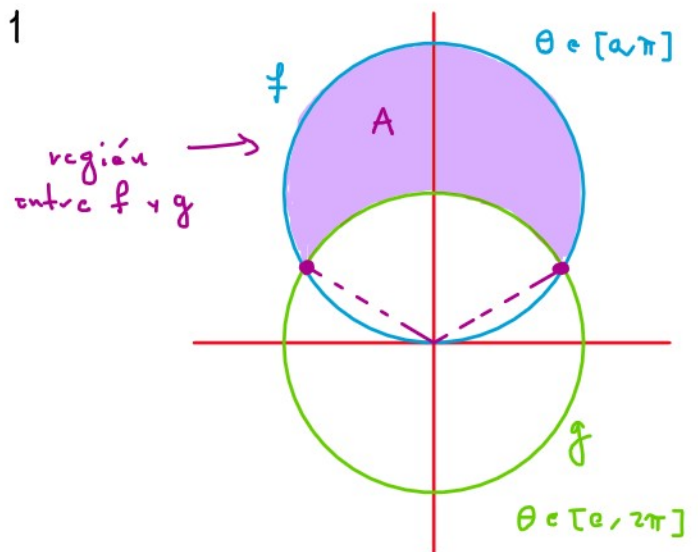
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

f se puede graficar con $\theta \in [0, 2\pi]$

g se puede graficar con $\theta \in [0, 2\pi]$



Veamos donde se intersecan las curvas:

$$f(\theta) = g(\theta) \Leftrightarrow 2 \sin \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Sabemos que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi]$

Sabemos que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi]$

Elegimos el intervalo $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$, en el cual

$$\sin \theta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(\theta) \geq g(\theta)$$

$$\Rightarrow A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{f^2(\theta)}{2} d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{g^2(\theta)}{2} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 2 \sin^2 \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{d\theta}{2}$$

↑ ↑
 área limitada por f área limitada por g

$$= \left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right] \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{1}{2} \left[\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right]$$

$$= \left[\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$= \left[\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] - \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

3) $f(\theta) = 6 \cos \theta$ y $g(\theta) = 2 + 2 \cos \theta$

↓

$$r = 6 \cos \theta$$

$$r^2 = 6 r \cos \theta$$

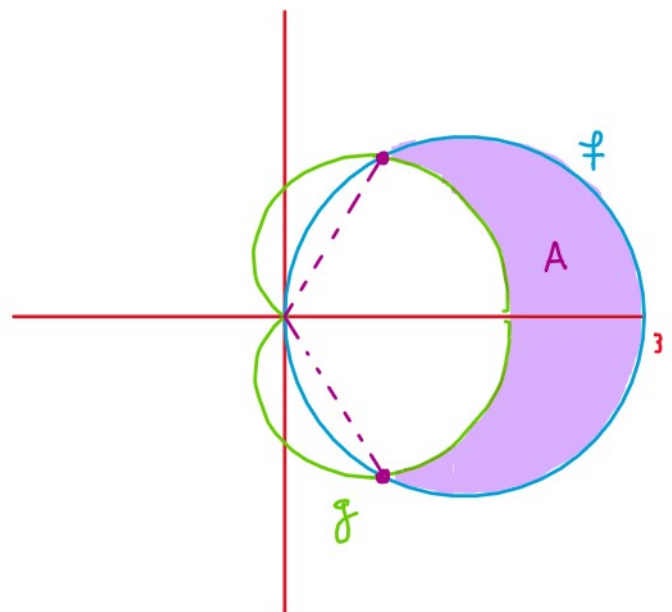
$$x^2 + y^2 = 6x$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

f se puede graficar con $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

g se puede graficar con $\theta \in [-\pi, \pi]$



Las curvas se intersecan en $f(\theta) = g(\theta) \Leftrightarrow 6 \cos \theta = 2 + 2 \cos \theta$

$$\Leftrightarrow 4 \cos \theta = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Notemos que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ y $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Elegimos el intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, en el cual

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(\theta) \geq g(\theta)$$

área limitada por f

área limitada por g

$$\Rightarrow A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{f^2(\theta)}{2} d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{g^2(\theta)}{2} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 18 \cos^2 \theta d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2 + 4 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= 16 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta - 4 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta d\theta - 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= 32 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta - 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta d\theta - 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

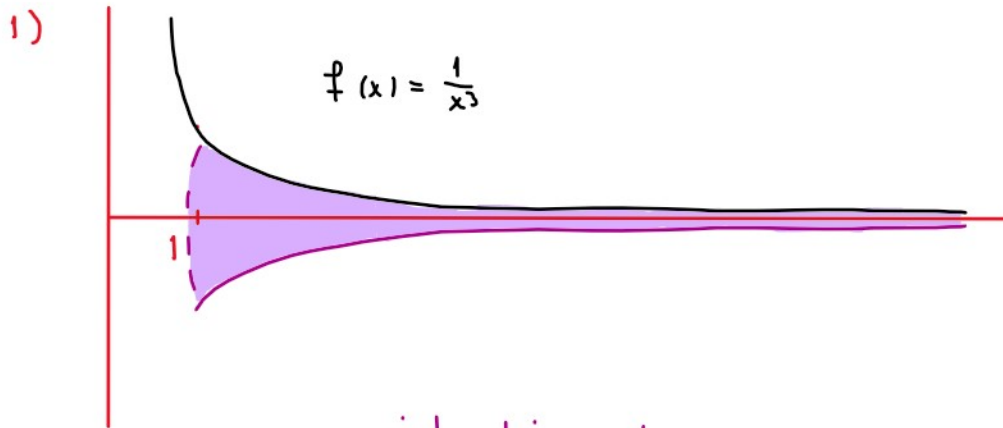
↙ coseno es par

$$= 16 \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - 8 [\sin \theta] \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - 2 \left[\frac{2\pi}{3} \right]$$

$$= 16 \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] - 8 \sin \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}$$

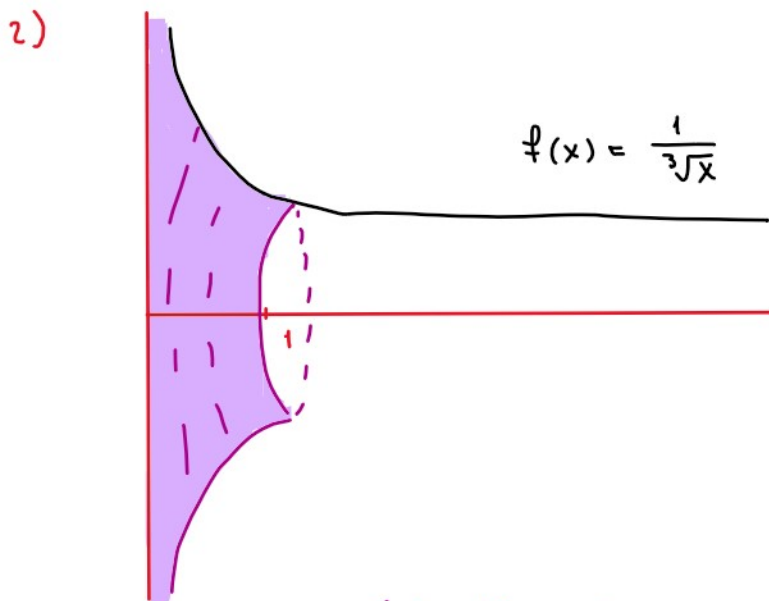
$$= \frac{16\pi}{3} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = \underline{\underline{4\pi}}$$

Ejercicio. Calcular el volumen de las siguientes sólidos de revolución:



✓ integral impropia

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right)^2 dx = \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^6} dx = \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{5x^5} \right]_1^b \\ &= \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\cancel{\frac{1}{5b^5}} + \frac{1}{5} \right] = \underline{\underline{\frac{\pi}{5}}} \end{aligned}$$



← integral impropia

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-\frac{2}{3}} dx = \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_a^1$$

$$= \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} [3\sqrt[3]{1} - \cancel{3\sqrt[3]{a}}] = \underline{\underline{3\pi}}$$

Ejercicio. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar la región que se encuentra entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2 - x$ alrededor del eje X .

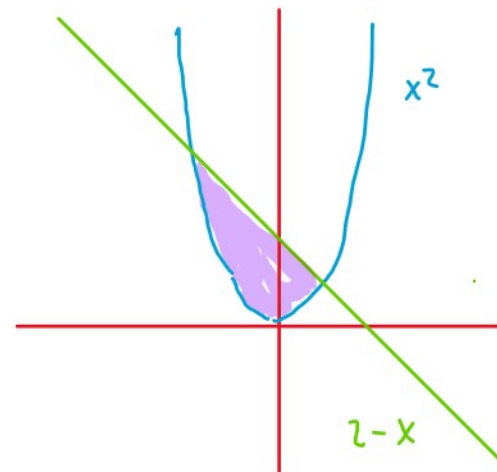
Veamos donde se intersecan ambas curvas:

$$x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{y} \quad x = 1$$

$\Rightarrow$ El área a rotar está comprendida en $[-2, 1]$.



Notemos que $2 - x \geq x^2$ si $x \in [-2, 1]$

$$2 - x - x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 \leq 0 \text{ y } x-1 \geq 0, \text{ o bien } x+2 \geq 0 \text{ y } x-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2 \text{ y } x \geq 1 \text{ o bien } x \geq -2 \text{ y } x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \quad \cup \quad [-2, 1]$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-2}^1 (2-x)^2 dx - \pi \int_{-2}^1 (x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^1 (4 - 4x + x^2) dx - \pi \int_{-2}^1 x^4 dx$$

$$= \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right] \Big|_{-2}^1$$

$$= \pi \left[4 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} \right) \right]$$

$$= \pi \left[2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 16 + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} \right]$$

$$= \pi \left[18 + \frac{9}{3} - \frac{33}{5} \right] = \pi \left[21 - \frac{33}{5} \right] = \underline{\underline{\frac{72}{5} \pi}}$$