

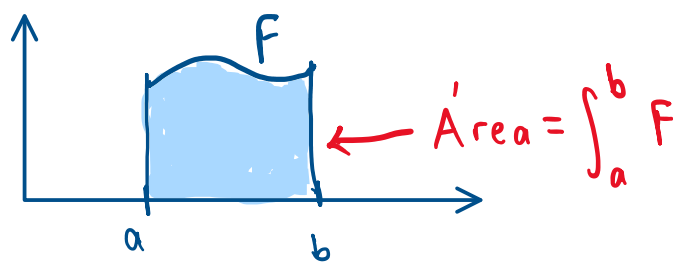
Aplicaciones

lunes, 16 de mayo de 2022

* Si F es una función integrable en $[a, b]$, entonces $\int_a^b F(x) dx$ es el único número real que cumple que

$$L(F, P) \leq \int_a^b F(x) dx \leq U(F, P) \text{ para toda } P \in \mathcal{P}_{[a, b]}.$$

Es decir, si $I \in \mathbb{R}$ es tal que $L(F, P) \leq I \leq U(F, P)$ para toda $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$, entonces $I = \int_a^b F(x) dx$.

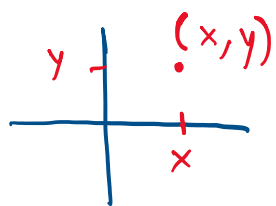


• Área en coordenadas polares

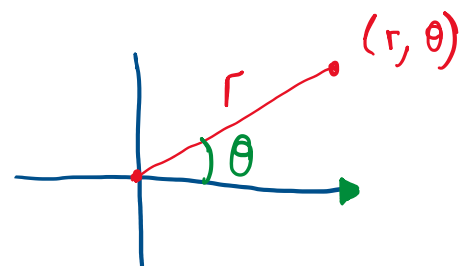
Calcular el área de la región que se encuentra entre el origen y la gráfica de una función continua en coordenadas polares.

* Ejemplos de gráficas de funciones en coordenadas polares.

$y = F(x)$
Coordenadas
rectangulares
 (x, y)

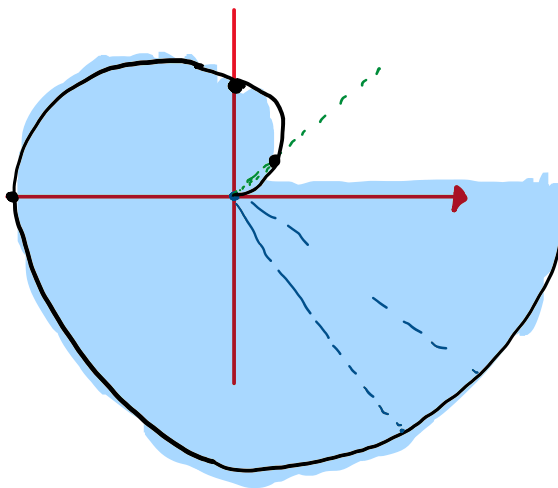


$r = F(\theta)$
Coordenadas
polares
 (r, θ)



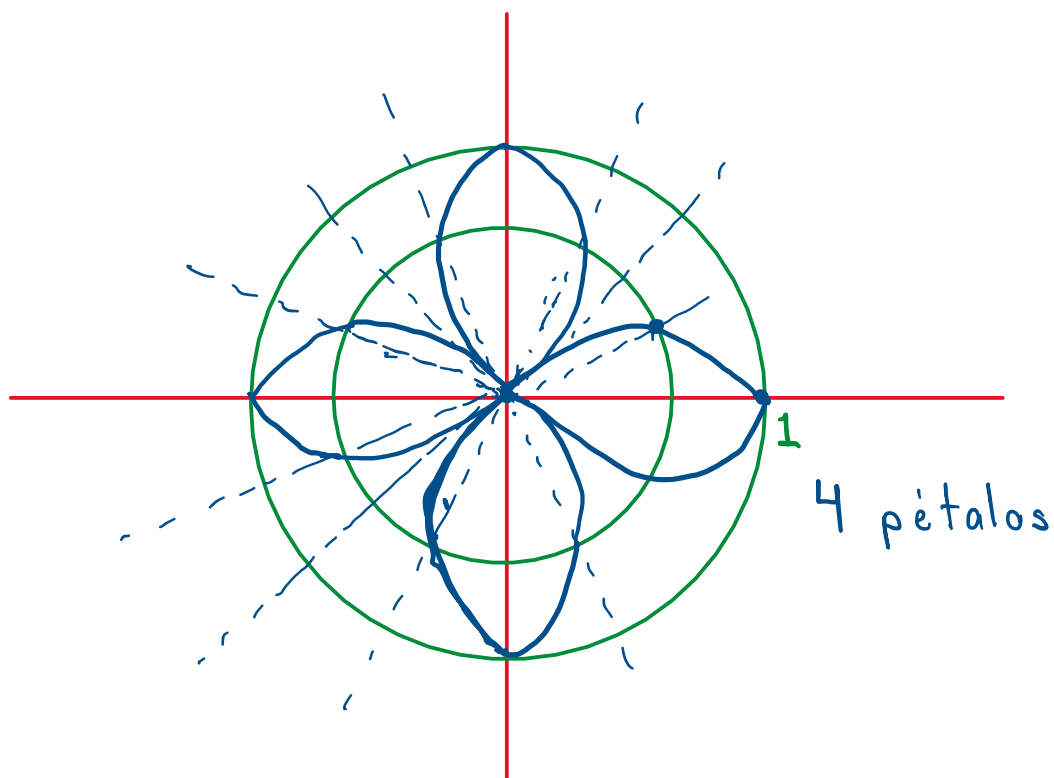
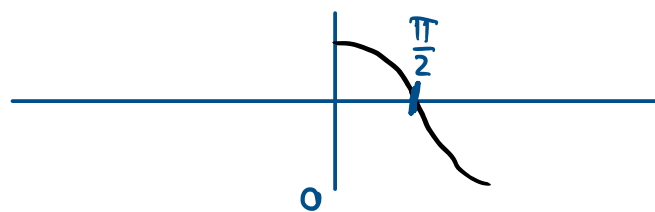
1) $r = F(\theta) = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
π	π



2) $F(\theta) = \cos 2\theta$
 $\theta \in [0, 2\pi]$

θ	r
0	1
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	0
$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	1



3) $F(\theta) = \cos \theta$
 $\theta \in [0, \pi]$

$$r = \cos \theta$$

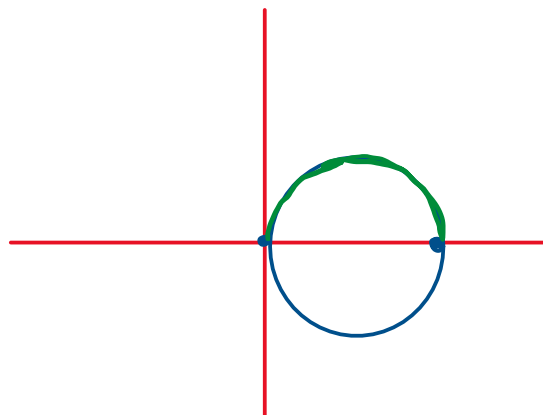
$$\Rightarrow r^2 = r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 = x$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Centro $(\frac{1}{2}, 0)$
radio $\frac{1}{2}$

θ	$\cos \theta$
0	1
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	-1



(Consideremos primero el caso en el que F es no negativa).

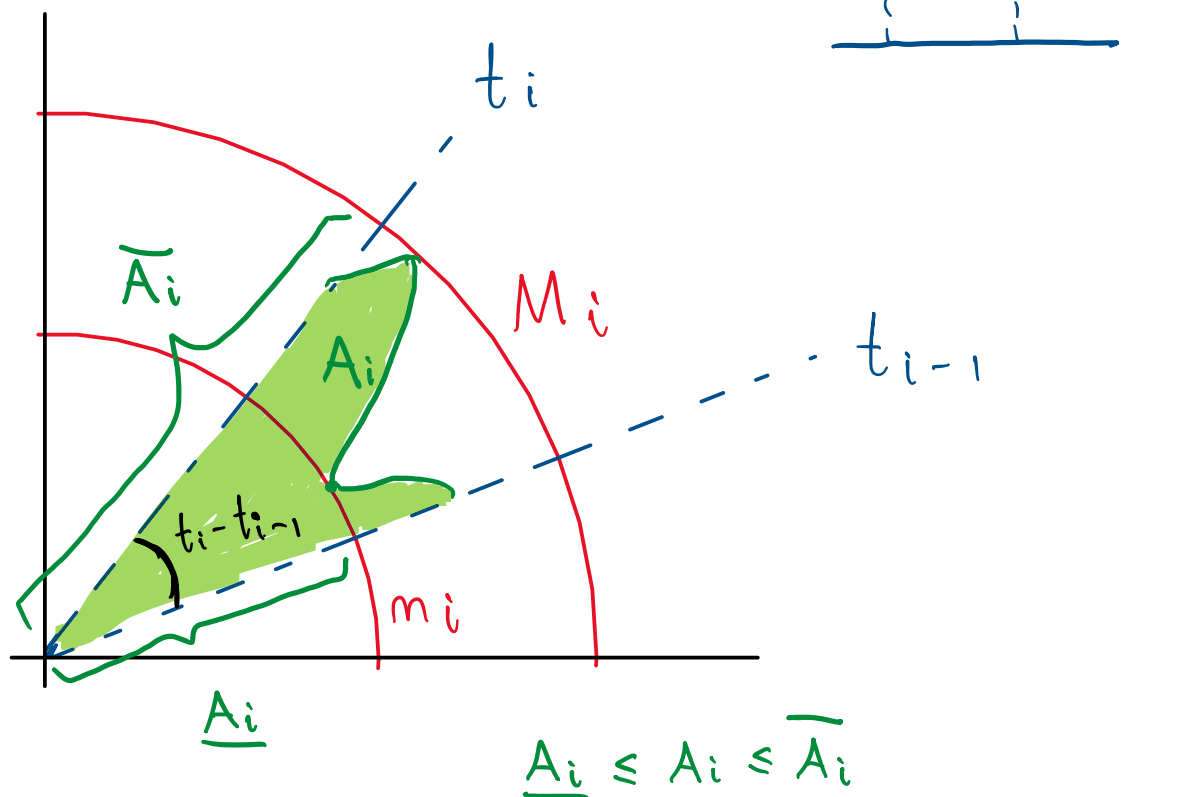
Sea $F: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow [0, \infty)$ una función continua.

Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[\theta_1, \theta_2]$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sean

$$m_i = \inf \{ F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} \text{ y}$$

$$M_i = \sup \{ F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}.$$

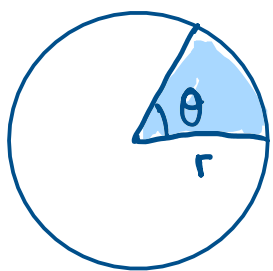
En cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, sean $\underline{A}_i$ el área del sector circular $\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq m_i, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ y $\bar{A}_i$ el área del sector circular $\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq M_i, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$.



Sea A el área de la región que se encuentra entre el origen y la gráfica de F en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$. Además, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea A_i el área de la región que se encuentra entre el origen y la gráfica de F en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

$$\Rightarrow \underline{A}_i \leq A_i \leq \bar{A}_i$$

* ¿Cómo calculamos el área de un sector circular? $\frac{\theta r^2}{2}$



Área Ángulo

$$\pi r^2 - 2\pi$$

$$\boxed{\frac{\theta r^2}{2} - \theta}$$

Dado que $\underline{A_i} = \frac{(t_i - t_{i-1}) m_i^2}{2}$ y $\overline{A_i} = \frac{(t_i - t_{i-1}) M_i^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(t_i - t_{i-1}) m_i^2}{2} \leq A_i \leq \frac{(t_i - t_{i-1}) M_i^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1}) m_i^2}{2} \leq A \leq \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1}) M_i^2}{2}$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{F^2}{2}, P\right) \leq A \leq U\left(\frac{F^2}{2}, P\right) \quad \text{para toda } P \in \mathcal{P}_{[\theta_1, \theta_2]}. \quad (**)$$

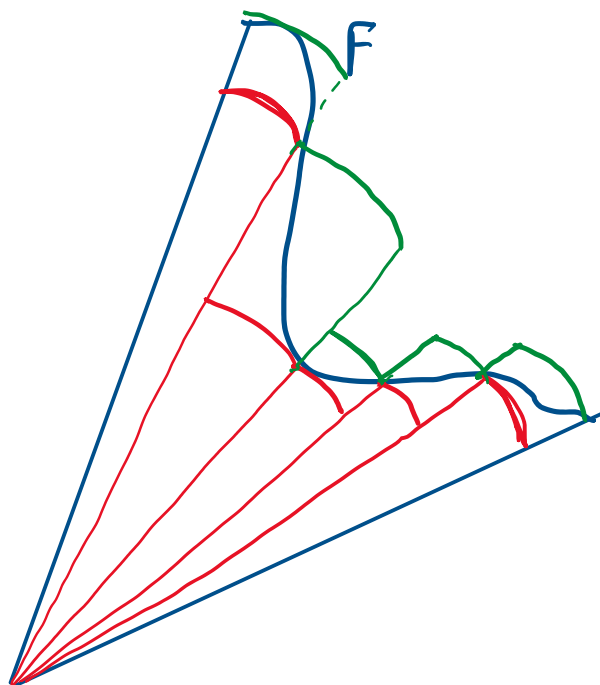
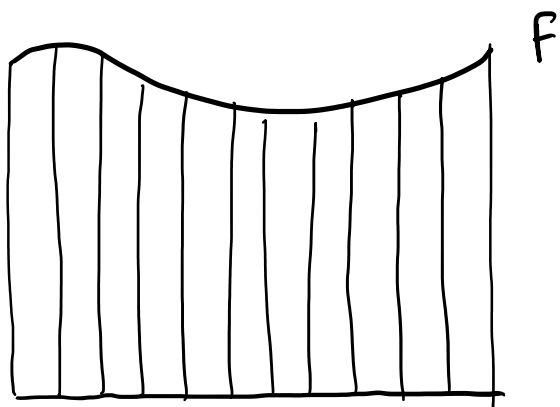
* (Como $F(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in [t_{i-1}, t_i]$)

$$\Rightarrow \inf \left\{ \frac{F(\theta)^2}{2} \mid \theta \in [t_{i-1}, t_i] \right\} = \frac{m_i^2}{2} \quad (\text{ejercicio})$$

$$\text{y } \sup \left\{ \frac{F(\theta)^2}{2} \mid \theta \in [t_{i-1}, t_i] \right\} = \frac{M_i^2}{2}.$$

Finalmente, como $\frac{F^2}{2}$ es integrable, deducimos de (**)
que

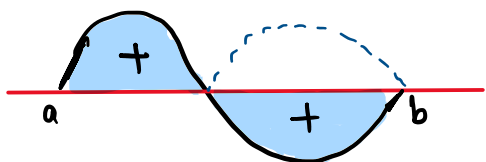
$$\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{[F(\theta)]^2}{2} d\theta}$$



* Si F toma valores negativos, podemos considerar la función $|F|$ obteniendo que

$$A \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{|F(\theta)|^2}{2} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{[F(\theta)]^2}{2} d\theta$$

∴ El área se puede calcular con la misma integral para toda función continua $F: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$.



$$A = \int_a^b |F| \neq \int_a^b F$$

Ejemplo:

Sea $F(\theta) = \cos 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi} \frac{F(\theta)^2}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4} \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} [2\pi] = \frac{\pi}{2} \quad (\text{mitad del área del círculo unitario}).$$