

Teorema de Taylor.

Supongamos que $f^{(n+1)}$ está definida en un intervalo abierto I tal que $a \in I$. Entonces:

1) para cada $x \in I$ existe c_x entre a y x tal que

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!} (x - c_x)^n (x - a) \quad (\text{Forma de Cauchy del residuo})$$

2) para cada $x \in I$ existe c_x entre a y x tal que

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \quad (\text{Forma de Lagrange del residuo})$$

Además, si $f^{(n+1)}$ es integrable en $[a, x]$ (en $[x, a]$), entonces

$$3) R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \quad (\text{Forma integral del residuo}).$$

Consideremos la función $F: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \log(1+x)$.

$$\Rightarrow F^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N} \quad \text{y toda } x \in (-1, \infty).$$

$$\Rightarrow F^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}$$

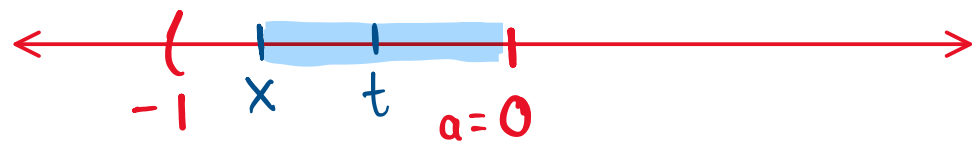
$$\Rightarrow P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

$$\Rightarrow \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_{n,0}(x)$$

La forma integral del residuo $R_{n,0}(x)$ es

$$R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1} n!} (x-t)^n dt = \int_0^x \frac{(-1)^n (x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

$$= \int_0^x \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = \int_0^x \left(\frac{t-x}{t+1} \right)^n \cdot \frac{1}{t+1} dt$$



$$\text{Si } x \in (-1, 0) \Rightarrow -1 < x \leq t < 0$$

$$0 \leq t-x < t-(-1)$$

$$0 \leq t-x < t+1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{t-x}{t+1} < 1$$

Aunque $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t-x}{t+1} \right)^n = 0$ cuando $-1 < x \leq t < 0$, no es claro cómo acotar $\left| \int_0^x \left(\frac{t-x}{t+1} \right)^n \cdot \frac{1}{t+1} dt \right|$

Sabemos que $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \log(1+x)$ para cada $x > -1$.

$$1+t \sqrt{1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^8 - t^9 + \dots}$$

Como

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \quad \text{para cada } t \in (-1, \infty)$$

Consideremos $x \in (-1, \infty)$.

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow \log(1+x) = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}}_{P_{n,0}(x)} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt = \log(1+x) - P_{n,0}(x) = R_{n,0}(x)$$

$$\therefore R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt$$