

Teorema. e es irracional.

Demostración.

Sup. que e es racional. Como $e > 0$, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}^+$ t.q.

$$e = \frac{a}{b}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq b$ y $n \geq 3$

$$\frac{a}{b} = e = e' = P_{n,0,F}(1) + R_{n,0,F}(1) \quad (\text{con } F(x) = e^x).$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_{n,0,F}(1)$$

Multiplicando por $n!$

$$\underbrace{\frac{an!}{b}}_{\substack{\text{entero} \\ n \geq b}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}}_{\text{entero}} + n! R_{n,0,F}(1)$$

$\Rightarrow n! R_{n,0,F}(1)$ es entero (por ser diferencia de enteros).

Por otro lado, dado que $|F^{(n+1)}(t)| = |e^t| = e^t \leq e' < 3$ para toda $t \in [0,1]$ (porque $F(x) = e^x$ es creciente), por i) del corolario de la clase pasada tenemos que

$$|R_{n,0}(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!} |1-0|^{n+1} = \frac{3}{(n+1)!} = \frac{3}{n!(n+1)}$$

$$\Rightarrow |n! R_{n,0}(1)| \leq \frac{3}{n+1} < 1$$

$\uparrow$
 $n \geq 3$

Finalmente, por el examen 3 sabemos que

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x \quad \text{si } x \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x - \left[1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} \right] = e^x - p_{n,0}(x)$$

$$\Rightarrow 0 < e - \left[1 + 1 + \dots + \frac{1}{n!} \right] = R_{n,0}(1)$$

$$\Rightarrow 0 < n! R_{n,0}(1) < 1, \quad \text{con } n! R_{n,0}(1) \in \mathbb{Z} !$$

$\therefore e$ es irracional.