

Teorema. Sea F una función tal que $F'(a), \dots, F^{(n)}(a)$ existen.
Si $P_{n,a,F}(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de F en a ,
entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - P_{n,a,F}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

* Sean h y g funciones tales que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$.

Consideremos $\varepsilon > 0$.

Entonces existe $\delta > 0$ t.q.

$$\forall x \in D_{\frac{h}{g}} \quad (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon)$$

$$(x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}) \Rightarrow |h(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

Si $h(x) = F(x) - P_{n,a,F}(x)$ y $g(x) = (x-a)^n$, entonces

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Rightarrow |F(x) - P_{n,a,F}(x)| < \varepsilon |(x-a)^n|$$

Recordatorio:

Criterio de la segunda derivada

Sea F una función tal que $F'(a) = 0$ y $F''(a)$ existe.

i) Si $F''(a) > 0$, entonces F tiene un mínimo local en a

ii) Si $F''(a) < 0$, entonces F tiene un máximo local en a

Si $F''(a) = 0$, entonces "el criterio Falla" (el criterio no da información sobre si a es mínimo o máximo local).

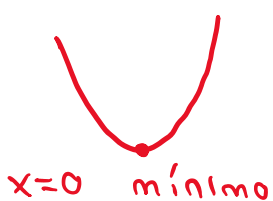
Ejemplo:

$$f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3 \rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

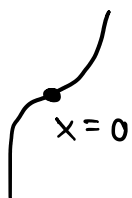


- $f(x) = -x^4$
 $x=0 \rightarrow \text{máximo}$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 0$$

- $f(x) = x^3$



$$f'(x) = 3x^2$$

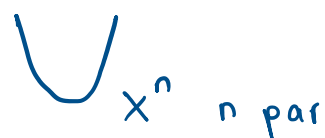
$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 0.$$

Teorema. Sea F una Función tal que
 $f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$.



(1) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces F tiene un mínimo local en a .

(2) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces F tiene un máximo local en a .

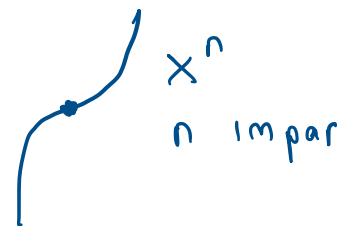
(3) Si n es impar, entonces F no tiene un máximo ni un mínimo en a .

Demostración

Sabemos que

$$P_{n,a,f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$



Por el teorema anterior,

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n}{(x-a)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

(*) $\Rightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n}$ y $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ tienen el mismo signo.

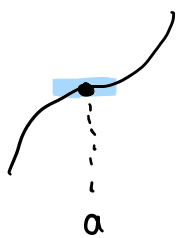
- Si n es par $\Rightarrow (x-a)^n > 0$ para toda $x \neq a$
 $\Rightarrow F(x) - F(a)$ y $F^{(n)}(a)$ tienen el mismo signo
 en $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$

1) Si $F^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow F(x) - F(a) > 0$
 $\Rightarrow F(x) > F(a)$ para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$
 $\Rightarrow F$ tiene un mínimo local en a .

2) Si $F^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow F(x) - F(a) < 0$
 $\Rightarrow F(x) < F(a)$ para cada $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$
 $\Rightarrow F$ tiene un máximo local en a .

- Si n es impar $\Rightarrow (x-a)^n > 0$ si $x > a$ y
 $(x-a)^n < 0$ si $x < a$.

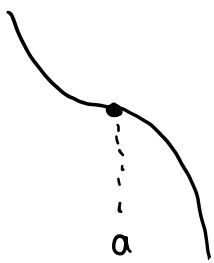
• Si $F^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow \frac{F(x) - F(a)}{(x-a)^n} > 0$



$\Rightarrow F(x) - F(a) > 0$ si $x > a$, $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$
 $F(x) - F(a) < 0$ si $x < a$

$\Rightarrow F$ no tiene máximo ni mínimo en a .

• Si $F^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow \frac{F(x) - F(a)}{(x-a)^n} < 0$

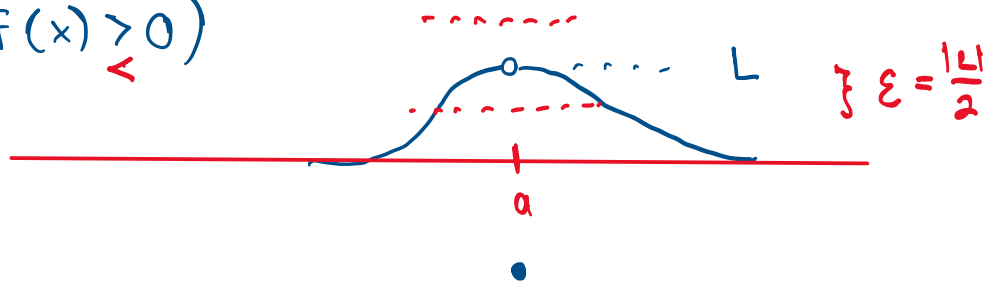


$\Rightarrow F(x) - F(a) < 0$ si $x > a$, $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$
 $F(x) - F(a) > 0$ si $x < a$

$\Rightarrow F$ no tiene máximo ni mínimo en a .

$\therefore$ Si n es impar, F no tiene máximo ni mínimo en a .

⊛ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $L > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que
 $\forall x \in D_f \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0)$



Ejemplos:

1) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

$$\text{y } f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

Como 4 es par y $f^{(4)}(0) > 0$,
 f tiene un mínimo local
 en 0.

2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 2} \text{ (único punto crítico)}$$

$$\rightarrow f'(2) = 0$$

$$f''(x) = 6x - 12 \rightarrow f''(2) = 0$$

$$f'''(x) = 6 \rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$$

Como 3 es impar, entonces f no tiene
 un máximo ni mínimo en $x = 2$.

Dado que 2 es el único punto crítico de f , entonces f
 no tiene máximos ni mínimos locales. (ni globales)

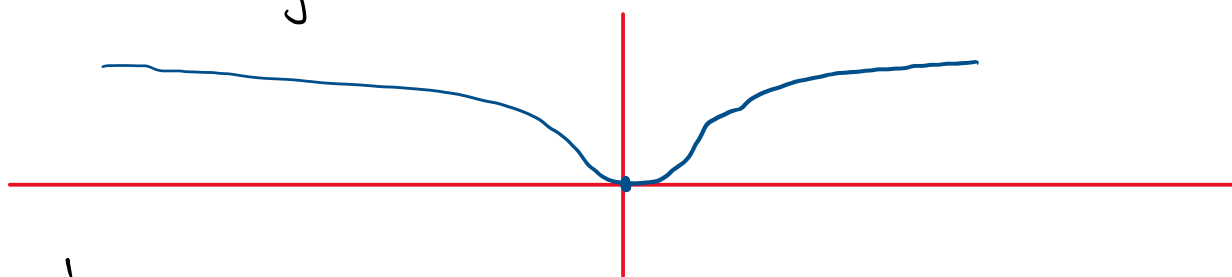
* Si F es derivable en a y F tiene un mínimo o máximo local en a , entonces $F'(a)=0$ (a es punto crítico de F).

** Todo máximo o mínimo global también es local.

$$3) \quad F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Par esta función F se cumple que $F^{(n)}(0)=0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, no es posible aplicar el teorema anterior.

• F tiene un mínimo global en $x=0$.



$$g(x) = \begin{cases} -e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

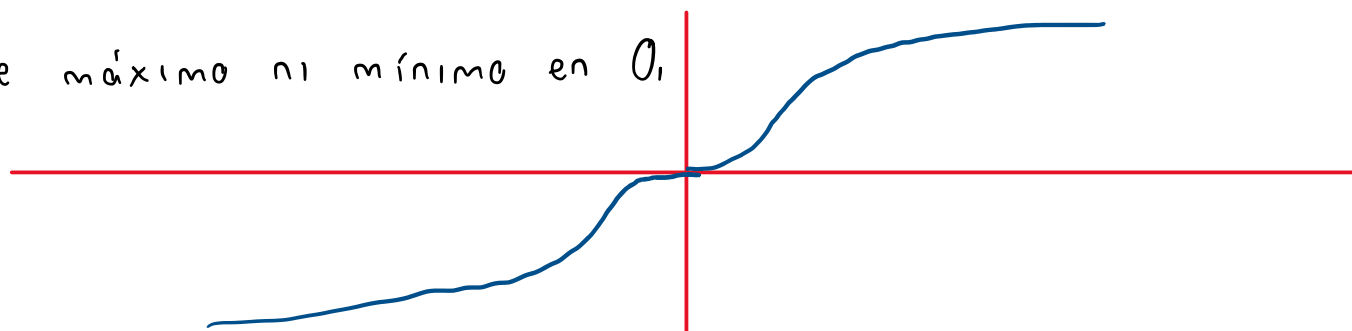
12:20

g tiene un máximo global en $x=0$ y $g^{(n)}(0)=0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$h^{(n)}(0)=0$ para todo $n \in \mathbb{N}$

h no tiene máximo ni mínimo en 0 .



Definición Dos Funciones F y g son iguales hasta el orden n en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Observación. $F(x)$ y $P_{n,a,F}(x)$ son iguales hasta el orden n en a (siempre que $F'(a), \dots, F^{(n)}(a)$ existan).

Observación. Supongamos que:

- F y g son Funciones iguales hasta el orden n en a y
- g y h son Funciones iguales hasta el orden n en a .

Entonces F y h son Funciones iguales hasta el orden n en a

Demostración

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - h(x)}{(x-a)^n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - h(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x) - g(x)}{(x-a)^n} + \frac{g(x) - h(x)}{(x-a)^n} \right] = 0 + 0 = 0.$$

Lema. Si R es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces $R=0$ (R es el polinomio cero).

Demostración

(Por inducción sobre n)

(Base $n=1$)

Sea R un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a 1 tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$$

P.D. $R=0$,

$\Rightarrow R(x) = b_0 + b_1(x-a)$ para algunos $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$.

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{R(x)}{x-a} \cdot (x-a) \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow a} (b_0 + b_1(x-a)) = b_0 \Rightarrow \boxed{b_0 = 0} \Rightarrow R(x) = b_1(x-a)$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{b_1(x-a)}{x-a} = b_1 \Rightarrow \boxed{b_1 = 0}$$

$$\therefore R(x) = 0.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que si R es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$,

entonces $R=0$,

Sea $R(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_{n+1}(x-a)^{n+1}$ un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a $n+1$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

(P.D. $R=0$).

Notemos ahora que

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} \cdot (x-a)^{n+1} \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow a} \left(b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_{n+1}(x-a)^{n+1} \right) = b_0 \Rightarrow \boxed{b_0 = 0}$$

$$\Rightarrow R(x) = b_1(x-a) + \dots + b_{n+1}(x-a)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{b_1(x-a) + \dots + b_{n+1}(x-a)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{[b_1 + \dots + b_{n+1}(x-a)^n] \cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)^n} (x-a)} \quad (*)$$

Como $b_1 + \dots + b_{n+1}(x-a)^n$ tiene grado menor o igual a n y cumple $(*)$, por hipótesis de inducción tenemos que $b_1 + \dots + b_{n+1}(x-a)^n = 0$
 $\Rightarrow b_1 = \dots = b_{n+1} = 0 \Rightarrow R(x) = 0$.

Teorema. Sean P y Q dos polinomios en $(x-a)$, de grado menor o igual a n . Si P y Q son iguales hasta el orden n en a , entonces $P=Q$.

Demostración

Por hipótesis, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Como $P-Q$ es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n , deducimos del lema anterior que $P-Q=0$, es decir, $P=Q$.

$$P(x) = b_0 + \dots + b_n(x-a)^n$$

$$Q(x) = c_0 + \dots + c_n(x-a)^n$$

$$P(x) - Q(x) = (b_0 - c_0) + \dots + (b_n - c_n)(x-a)^n$$

Corolario. Sea F una Función tal que $F'(a), \dots, F^{(n)}(a)$ existen.
Si P es un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n ,
igual a F hasta el orden n en a , entonces $P = P_{n,a,F}$.

Demostración. Por hipótesis,

P es igual a F hasta el orden n en a .

Además,

F y $P_{n,a,F}$ son iguales hasta el orden n en a

$\Rightarrow P$ y $P_{n,a,F}$ son iguales hasta el orden n en a .

Debido al teorema anterior, como P y $P_{n,a,F}$ son de grado menor o igual a n , concluimos que $P = P_{n,a,F}$.