

Definición. Sea F una función tal que $F'(a), \dots, F^{(n)}(a)$ existen. Definimos el polinomio de Taylor de grado n de F en a como

$$P_{n,a,F}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n,$$

donde $a_k = \frac{F^{(k)}(a)}{k!}$ para cada $k \in \{0, \dots, n\}$,

es decir,

$$\begin{aligned} P_{n,a,F}(x) &= F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

Ejemplos

① $F(x) = e^x$

$$P_{n,0,F}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

② $F(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} P_{2n+1,0,F}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

③ $F(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} P_{2n,0,F}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad F(x) = \log(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$F''(x) = -1 x^{-2}$$

$$F'''(x) = -1(-2) x^{-3}$$

$$F^{(4)}(x) = -1(-2)(-3) x^{-4}$$

$$\vdots = (-1)^3 3! x^{-4}$$

$$F^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$$

$$F(1) = \log(1) = 0$$

$$\Rightarrow F'(1) = 1$$

$$F''(1) = -1$$

$$F'''(1) = 2$$

$$F^{(4)}(1) = -3!$$

$$\vdots$$

$$F^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$\Rightarrow P_{n,1,F}(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n$$

$$P_{n,1,F}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}$$

$$* \quad \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! n} = \frac{1}{n}$$

- Para evitar escribir el polinomio en $(x-1)$, podemos considerar la función

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$f(0) = \log(1) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -1(-2)(1+x)^{-3} \quad f'''(0) = 2$$

$\vdots$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\Rightarrow P_{n,0,f}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

Teorema. Sea f una función tal que $f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ existen. Si $P_{n,a,f}(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de f en a , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración.

(Por inducción sobre n).

Base ($n=1$).

Sea f una función tal que $f'(a)$ existe

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{1,a,f}(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x) - F(a)}{x - a} - \underbrace{F'(a)}_{\substack{\text{constante} \\ \text{(no depende de } x)}} \right] = F'(a) - F'(a) = 0.$$

$$* \quad F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

H.I.: Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que si F es una Función tal que $F'(a), \dots, F^{(n)}(a)$ existen, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - P_{n,a,F}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

P.D. Si F es una Función tal que $F'(a), \dots, F^{(n+1)}(a)$ existen, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - P_{n+1,a,F}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - P_{n+1,a,F}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - \left[F(a) + F'(a)(x-a) + \dots + \frac{F^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right]}{(x-a)^{n+1}}$$

Como F es derivable en a , entonces F es continua en a

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) - \left[\underbrace{F(a)}_{\text{constante}} + \underbrace{F'(a)}_{\text{constante}}(x-a) + \dots + \frac{F^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right] = F(a) - [F(a) + 0] = 0$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{n+1} = 0.$$

Utilizando la regla de L'Hôpital tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - P_{n+1,a,F}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x) - \left[F'(a) + F''(a)(x-a) + \dots + \frac{F^{(n+1)}(a)}{n!} (x-a)^n \right]}{(n+1)(x-a)^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x) - \left[F'(a) + (F')'(a)(x-a) + \dots + \frac{(F')^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right]}{(x-a)^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x) - P_{n,a,F'}(x)}{(x-a)^n}$$

Como F' es una función tal que $(F')'(a), \dots, (F')^{(n)}(a)$ existen (porque $(F')'(a) = F''(a), \dots, (F')^{(n)}(a) = F^{(n+1)}(a)$), por hipótesis de inducción

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x) - P_{n,a,F'}(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - P_{n+1,a,F}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

* Observaciones:

En el teorema anterior, si consideramos $a=0$ tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P_{n,0,f}(x)}{x^n} = 0$$

$$f(x) = e^x$$

$$P_{n,0,f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{Si } n=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0 \quad (\text{Teorema})$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6x} \quad \text{no existe}$$