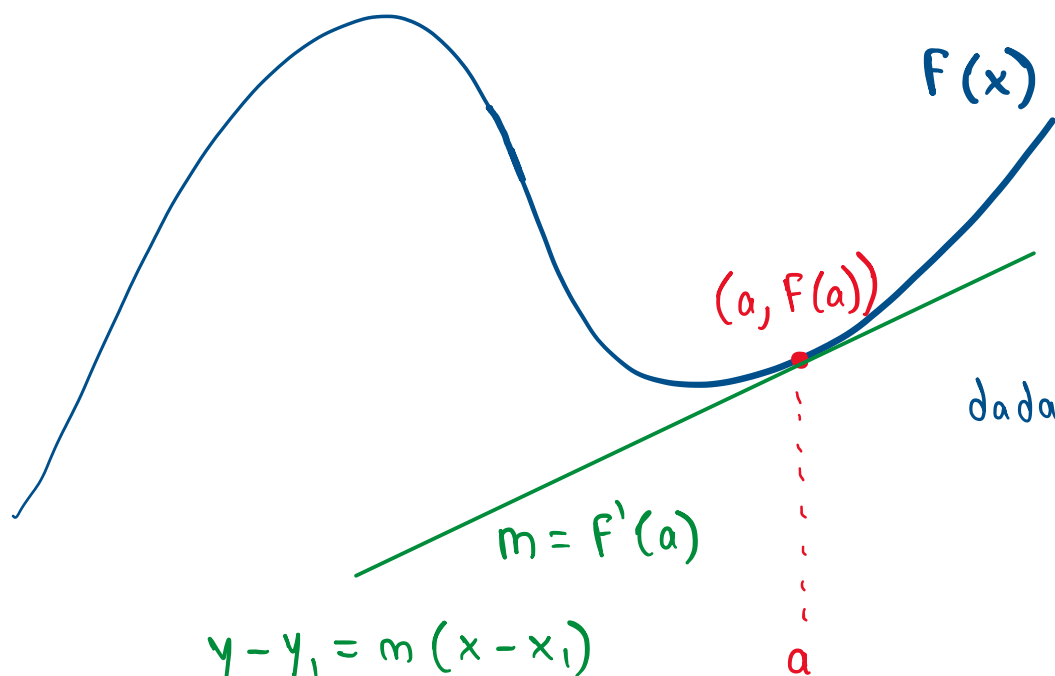


Polinomios de Taylor

miércoles, 4 de mayo de 2022



Si F es derivable en a ,
entonces la recta tangente
a la gráfica de F está
dada por la ecuación

$$y = F(a) + F'(a)(x-a)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - F(a) = F'(a)(x - a)$$

$$y = F(a) + F'(a)(x - a)$$

Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$$\Rightarrow P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1}$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$P^{(3)}(x) = 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}$$

$\vdots$

$$P^{(n)}(x) = n! a_n$$

$$\Rightarrow P(0) = a_0, \quad \Rightarrow a_0 = \frac{P(0)}{0!}$$

$$P'(0) = a_1, \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}$$

$$P''(0) = 2a_2, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}$$

$$P^{(3)}(0) = 6a_3, \quad a_3 = \frac{P^{(3)}(0)}{3!}$$

$\vdots$

$$P^{(n)}(0) = n! a_n, \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!},$$

es decir,

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{para cada } k \in \{0, \dots, n\}$$

$$* \quad F^{(0)} = F \quad \text{y} \quad F^{(1)} = F'$$

También, si

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$$

(Polinomio alrededor de a)

$$\Rightarrow P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \dots + na_n(x-a)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$$

$\vdots$

$$P^{(n)}(x) = n! a_n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(a) &= a_0 & \Rightarrow a_0 &= \frac{P(a)}{0!} \\ P'(a) &= a_1 & a_1 &= \frac{P'(a)}{1!} \\ P''(a) &= 2a_2 & a_2 &= \frac{P''(a)}{2!} \\ &\vdots & & \\ P^{(n)}(a) &= n! a_n & a_n &= \frac{P^{(n)}(a)}{n!}, \end{aligned}$$

es decir,

$$a_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{para cada } k \in \{0, \dots, n\}$$

Definición. Sea F una función tal que $F'(a), \dots, F^{(n)}(a)$ existen. Definimos el polinomio de Taylor de grado n de F en a como

$$P_{n,a,F}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n,$$

donde $a_k = \frac{F^{(k)}(a)}{k!}$ para cada $k \in \{0, \dots, n\}$,

es decir,

$$\begin{aligned} P_{n,a,F}(x) &= F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

En muchas ocasiones omitiremos el subíndice F (cuando sea claro cuál es la función F).

Por ejemplo,

si $n=1 \Rightarrow P_{1,a,F}(x) = F(a) + F'(a)(x-a)$ ← ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en $x=a$.

Observación:

$$P_{n,a,F}(a) = F(a)$$

Ejemplos:

① Sea $F(x) = e^x$

En este caso, F tiene derivadas de todos los órdenes para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, F es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Más aún,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F^{(k)}(x) = e^x$$

En particular,

$$F^{(k)}(0) = e^0 = 1 \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Luego, el polinomio de Taylor de e^x de grado n en $a=0$ es

$$P_{n,0,F}(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$P_{n,0,F}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Definición F es de clase C^1 en A si F tiene derivada continua en A .

• F es de clase C^n en A si $F^{(n)}(x)$ es continua en A .
Como consecuencia de esto, $F^{(k)}(x)$ es continua en A para toda $k \in \{0, \dots, n\}$. (Si $k < n$, como $F^{(k)}$ es derivable $\Rightarrow F^{(k)}$ es continua).

• F es de clase C^∞ en A si tiene derivadas de todos los órdenes en A , es decir, $F^{(n)}$ existe para cada $n \in \mathbb{N}$.

(Como cada $F^{(n)}$ es derivable, entonces $F^{(n)}$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$).

② Sea $F(x) = \sin x$

$$\Rightarrow F'(x) = \cos x = F^{(1)}(x) \Rightarrow F'(0) = 1$$

$$F''(x) = -\sin x = F^{(2)}(x) \quad F''(0) = 0$$

$$F^{(3)}(x) = -\cos x \quad \vdots \quad F^{(3)}(0) = -1$$

$$F^{(4)}(x) = \sin(x) \quad F^{(4)}(0) = 0$$

Luego,

$$P_{n,0,F}(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

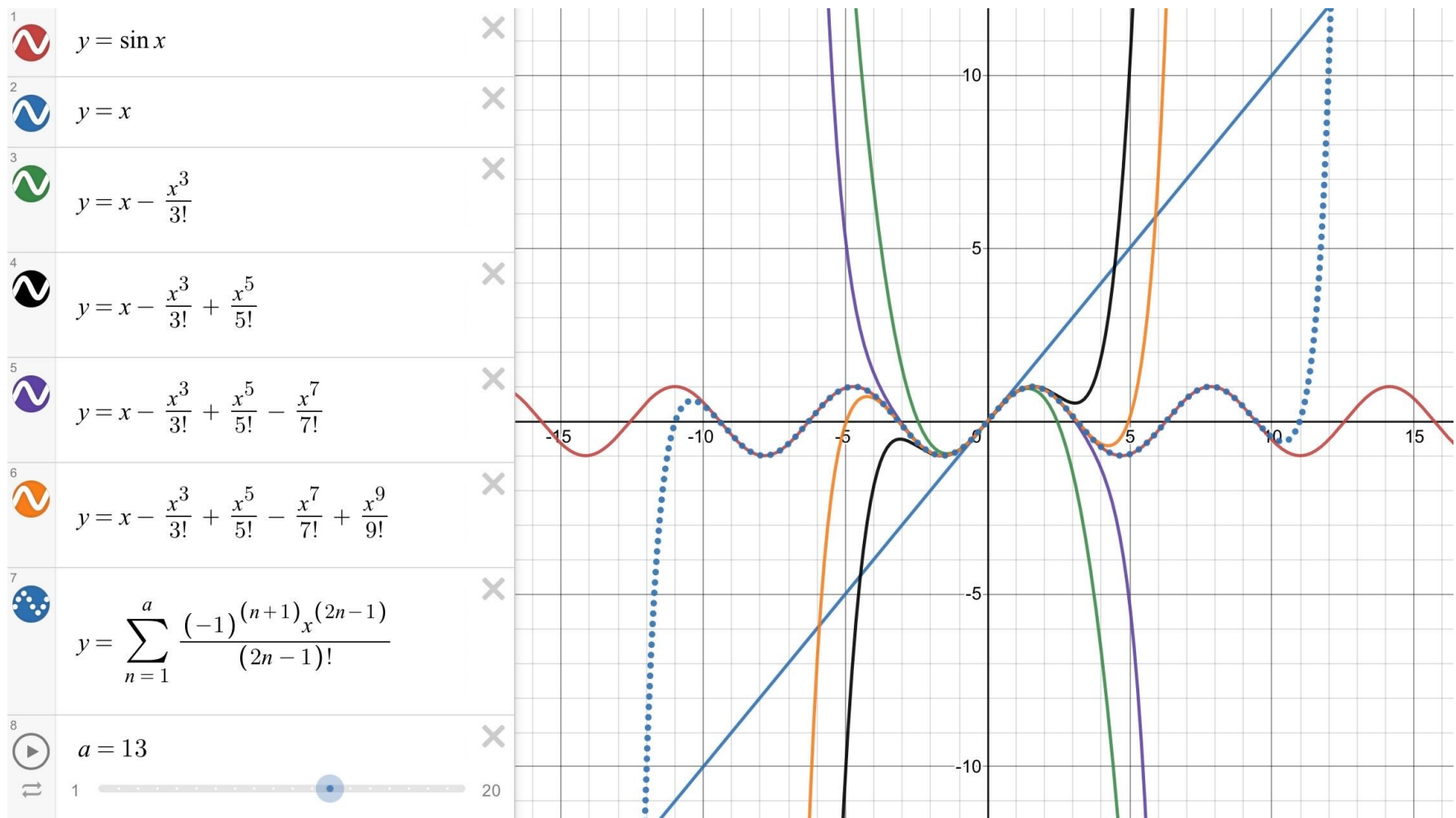
$$P_{2n+1,0,F}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Polinomio de Taylor de $\sin(x)$
de grado $2n+1$ en $a=0$.

* Como $F^{(2n+2)}(0) = 0$, entonces $P_{2n+2,0,F}(x) = P_{2n+1,0,F}(x)$

$$P_{2n+2,0,F}(x) = P_{2n+1,0,F}(x) + \frac{\cancel{F^{(2n+2)}(0)}}{(2n)!} x^{2n}$$



③ $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x = f^{(4n+1)}(x) \\ f''(x) &= -\cos x = f^{(4n+2)}(x) \\ f^{(3)}(x) &= \sin x = f^{(4n+3)}(x) \\ f^{(4)}(x) &= \cos x = f^{(4n)}(x) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} f^{(4n+1)}(0) &= 0 \\ f^{(4n+2)}(0) &= -1 \\ f^{(4n+3)}(0) &= 0 \\ f^{(4n)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$P_{n,0,f}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$P_{2n,0,f}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Polinomio de Taylor de $\cos x$
de grado $2n$ en $a=0$

Como $f^{(2n+1)}(0) = 0$, entonces $P_{2n+1,0,f}(x) = P_{2n,0,f}(x)$.