

Método de sustitución

jueves, 21 de abril de 2022

Teorema (Método de sustitución)

Si F y g' son Funciones continuas, entonces

$$\int_a^b F(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} F(u) du$$

(g' debe ser continua en $[a, b]$ y F debe ser continua en $g([a, b])$).

Demostración

Sea F una primitiva de F (esta primitiva existe porque F es continua).

Por el 2º T.F.C. tenemos que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} F(u) du = F(g(b)) - F(g(a))$$

Notemos ahora que $(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x)) \cdot g'(x)$, es decir, $(F \circ g)(x)$ es una primitiva de $F(g(x)) \cdot g'(x)$. Nuevamente, por el 2º T.F.C.

$$\int_a^b F(g(x)) \cdot g'(x) dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Concluimos que

$$\int_a^b \underline{F(g(x))} \cdot \underline{g'(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \underline{F(u)} \underline{du}.$$

(F es primitiva de F si $F' = F$)

Nota:

Para obtener la integral del lado derecho a partir de la integral del lado izquierdo:

- sustituimos $g(x)$ por $u \rightarrow u = g(x)$
 $g'(x)dx$ por $du \rightarrow du = g'(x)dx$

* Cambiamos los límites de integración evaluando la Función $u = g(x)$ en a y en b .

$$\int_a^b \sin^4(x) \cos(x) dx = \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} u^4 du = \frac{u^5}{5} \Big|_{\sin(a)}^{\sin(b)} = \frac{\sin^5(b)}{5} - \frac{\sin^5(a)}{5}$$

$$u = \sin(x)$$

$$du = \cos(x) dx$$

* Esto no es necesario escribirlo:

$$\int_a^b \sin^4(x) \cos(x) dx = \int_a^b (\sin(x))^4 \cos(x) dx = \int_a^b F(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Aquí, $F(x) = x^4$

$$g(x) = \sin(x)$$

$$g'(x) = \cos(x)$$

$$\int_a^b \tan x \, dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = - \int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{du}{u} = - \log |u| \Big|_{\cos(a)}^{\cos(b)}$$

~~$$u = \sin x$$

$$du = \cos x \, dx$$~~

En la integral aparece

$$\frac{1}{\cos x} \, dx \neq \cos x \, dx$$

$$u = \cos x$$

$$du = -\sin x \, dx$$

$$= -\log |\cos(b)| - (-\log |\cos(a)|)$$

$$= -\log |\cos(b)| + \log |\cos(a)|$$

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x} \, dx = \int_a^b \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \int_{\log(a)}^{\log(b)} \frac{1}{u} \, du = \log |u| \Big|_{\log(a)}^{\log(b)}$$

$$u = \log x$$

$$du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \log |\log(b)| - \log |\log(a)|$$

¿Cómo aplicar el método de sustitución con integrales indefinidas?

Queremos hallar

$$\int F(g(x)) \cdot g'(x) \, dx.$$

Para esto, debemos encontrar una primitiva de $F(g(x)) \cdot g'(x)$.

Si F y g' son continuas (por ejemplo, g' continua en $[a, b]$ y F continua en $g([a, b])$), por el 1º T.F.C. sabemos que

$$H(x) = \int_a^x F(g(t)) \cdot g'(t) \, dt$$

es una primitiva de $F(g(x)) \cdot g'(x)$.

(Queremos encontrar H de manera más explícita).

Por el teorema de sustitución:

$$H(x) = \int_a^x F(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(x)} F(u) du = \underbrace{F(g(x))}_{\text{es constante}} - F(g(a)),$$

donde F es una primitiva de f .

Luego, $F(g(x))$ difiere de $H(x)$ por una constante ($-F(g(a))$), así que $F(g(x))$ es la primitiva buscada.

En resumen, para calcular

$$\int F(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

debemos:

1) realizar la sustitución $u = g(x)$ y $du = g'(x) dx$
para obtener $\int F(u) du$

2) calcular la integral (en términos de u) $\rightarrow F(u) + c$

3) sustituir u por $g(x)$ para obtener $F(g(x)) + c$

$$\int \frac{3x}{x^2+7} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+7} dx = \frac{3}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{3}{2} \log|u| + c$$

$$u = x^2 + 7$$

$$du = 2x dx$$

$$= \frac{3}{2} \log|x^2+7| + c$$

$$\int_a^b \frac{3x}{x^2+7} dx = \frac{3}{2} \int_a^b \frac{2x}{x^2+7} dx = \frac{3}{2} \int_{a^2+7}^{b^2+7} \frac{du}{u} = \frac{3}{2} \log|u| \Big|_{a^2+7}^{b^2+7}$$

$$u = x^2 + 7$$

$$du = 2x dx$$

$$= \frac{3}{2} \log|b^2+7| - \frac{3}{2} \log|a^2+7|$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int x^4 \sec^2(2x^5) dx = \frac{1}{10} \int \frac{10x^4 \sec^2(2x^5)}{10} dx = \frac{1}{10} \int \sec^2(u) du$$

$$u = 2x^5$$

$$du = 10x^4 dx$$

~~$$u = \sec(\quad)$$~~

~~$$du = \sec(\quad) \tan(\quad) dx$$~~

$$= \frac{1}{10} \tan(u) + c$$

$$= \frac{1}{10} \tan(2x^5) + c$$

Calcularemos la integral $\int e^{\sqrt{x}} dx$ de dos maneras distintas:

Sustitución "directa":

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{x}} \cdot (2\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad (x > 0)$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \int e^u (2u) du = 2 \int u e^u du$$

ya se calculó por partes.

$$= 2 e^u [u - 1] + c$$

$$= 2 e^{\sqrt{x}} [\sqrt{x} - 1] + c$$

$$* \int x^n e^x dx = e^x (x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - \dots)$$

Sustitución inversa:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^u \cdot 2u du = \dots = 2 e^{\sqrt{x}} [\sqrt{x} - 1] + c$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$u^2 = x$$

despejar x

$$2u du = dx$$

(sustituimos dx en la integral).

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$\begin{cases} u = e^x + 1 \\ du = e^x dx \\ u-1 = e^x \end{cases}$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} (e^x+1)^{\frac{3}{2}} - 2 (e^x+1)^{\frac{1}{2}} + c$$

Sustitución inversa

$(e^x)^2$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx = \int \frac{(u^2-1)^2}{u} \cdot \frac{2u}{(u^2-1)} du = 2 \int u^2-1 du$$

$$u = \sqrt{e^x+1}$$

$$u^2 = e^x+1$$

$$u^2-1 = e^x$$

$$\log(u^2-1) = x$$

$$\frac{2u}{u^2-1} du = dx$$

$$= 2 \left(\frac{u^3}{3} - u \right) + C$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{e^x+1})^3 - 2\sqrt{e^x+1} + C$$