

Métodos de integración

lunes, 18 de abril de 2022

Una **primitiva** de una función F es una función F que cumple que $F' = F$.

Proposición

Si $F(x)$ es una primitiva de $F(x)$ en un intervalo I , entonces el conjunto de primitivas de F en I está dado por

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Demostración

Sea $A = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Notemos que si $g(x) \in A \Rightarrow g(x) = F(x) + c$ para alguna $c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow g'(x) = F'(x) = F(x)$$

$\Rightarrow g(x)$ es una primitiva de $F(x)$.

Recíprocamente, si $g(x)$ es una primitiva de $F(x) \Rightarrow g'(x) = F(x) = F'(x)$

$\Rightarrow$ existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $g(x) = F(x) + c \Rightarrow g(x) \in A$.

Si f es una función continua en $[a, b]$, por el primer T.F.C. sabemos que

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es una primitiva de f en $[a, b]$.

Si f es integrable en $[a, b]$ y F es una primitiva de f en $[a, b]$, por el segundo T.F.C. tenemos que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Notación. El símbolo

$$\int F \quad \text{o} \quad \int F(x) dx$$

denotará a todas las primitivas de F , considerando a C como cualquier número real.

Por ejemplo:

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C$$

* Usualmente a $\int_a^b F(x) dx$ se le conoce como integral definida y a $\int F(x) dx$ se le llama integral indefinida.

Como consecuencia de que $(F+g)' = F' + g'$ y $(cF)' = c \cdot F'$ cuando F y g son funciones derivables, tenemos que

$$\int F(x) + g(x) dx = \int F(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\text{y} \quad \int c F(x) dx = c \int F(x) dx$$

Teorema (Integración por partes)

Si F' y g' son funciones continuas, entonces

$$\int F g' = F g - \int F' g, \quad \int u dv = uv - \int v du$$

$$\int F(x) g'(x) dx = F(x) g(x) - \int F'(x) g(x) dx$$

$$\int_a^b F(x) g'(x) dx = F(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F'(x) g(x) dx.$$

Demostración.

Sabemos que

$$(Fg)' = Fg' + F'g$$

$$\Rightarrow Fg' = (Fg)' - F'g \quad (*)$$

$$\Rightarrow \int Fg' = \int (Fg)' - \int F'g$$

primitivas de $(Fg)'$

Como Fg es primitiva de $(Fg)'$, tenemos que

$$\int Fg' = Fg - \int F'g.$$

↑ ya incluye una
"constante de integración"

La segunda igualdad es la misma que la primera, usando la notación $\int F(x) dx$ en lugar de $\int F$.

Por otro lado, como F' y g' son continuas, entonces Fg' , $(Fg)'$ y $F'g$ son integrables en $[a, b]$ y

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = \int_a^b (F \cdot g)'(x)dx - \int_a^b F'(x)g(x)dx$$

Como Fg es una primitiva de $(F \cdot g)'$, por el 2º T.F.C. tenemos

que

$$\int_a^b (F \cdot g)'(x)dx = F(x) \cdot g(x) \Big|_a^b$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x)g'(x)dx = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F'(x)g(x)dx.$$

* Si F es una función derivable, se define la "diferencial de F " como

$$F'(x)dx.$$

Si en la igualdad

$$\int F(x)g'(x)dx = F(x)g(x) - \int F'(x)g(x)dx$$

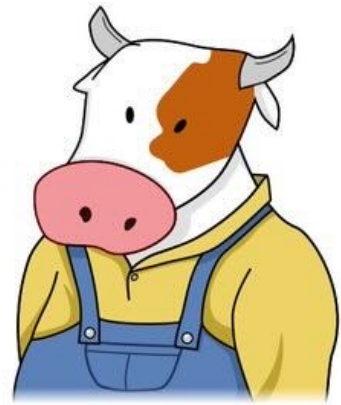
definimos $u = F(x)$, $v = g(x)$,

$$du = F'(x)dx \quad \text{y} \quad dv = g'(x)dx,$$

obtenemos la ecuación

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \underbrace{u} \underbrace{dv} = \underbrace{uv} - \int \underbrace{v} \underbrace{du}$$



un día vi una vaca vestida de uniforme

Ejemplos:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

$$du = 1 dx \quad v = e^x$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$u = x \quad dv = \sin x dx$$

$$du = dx \quad v = -\cos x$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$u = \sin x \quad dv = e^x dx$$

$$du = \cos x dx \quad v = e^x$$

$$u = \cos x \quad dv = e^x dx$$

$$du = -\sin x \quad v = e^x$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \right]$$

$$\Rightarrow \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$

$$\Rightarrow \boxed{\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + c}$$

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \left(\frac{1}{x} \right) dx = x \log x - \int dx$$

$$u = \log x \quad dv = 1 \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$$

$$= \boxed{x \log x - x + c}$$

* Notación: $\int 1 \, dx = \int dx \quad (= x + c)$

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{dx}{g(x)}.$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x} dx$$

$$u = \log x \quad dv = \frac{1}{x} dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \log x$$

$$\Rightarrow \int \frac{\log x}{x} dx = \frac{(\log x)^2}{2} + C = \frac{\log^2 x}{2} + C$$

* Notación: $(\log x)^n = \log^n x$.

$$\int (\log x)^2 dx = (\log x)(x \log x - x) - \int \log x - 1 dx$$

$$u = \log x \quad dv = \log x dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = x \log x - x \\ = x(\log x - 1)$$

$$= x \log^2 x - x \log x - [x \log x - x - x] + C$$

$$= x \log^2 x - 2x \log x + 2x + C$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

$$du = 1 dx \quad v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2[x e^x - e^x] + C$$

$$u = x^2 \quad dv = e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$du = 2x dx \quad v = e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 [x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x] + c$$

$$\begin{aligned} u = x^3 \quad dv = e^x dx \\ du = 3x^2 \quad v = e^x \end{aligned} \qquad = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c$$

$$\int x^6 e^x dx = e^x [x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720] + c$$

¿Cómo elegir u y dv ?

- u ↓
- I**nversas: arcsen, arctan, etc.
 - L**ogarítmicas: log, log_b, ln, etc.
 - A**lgebraicas: polinómicas, racionales, raíces, etc.
 - T**rigonométricas: sen, cos, tan, ...
 - E**xponenciales: e^x , a^x , ...