

Más ejercicios con las funciones logaritmo y exponencial

jueves, 7 de abril de 2022

Ejercicio. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{20^x - 1}{x} \quad \frac{0}{0}$

$$20 > 0 \Rightarrow 20^x = e^{x \cdot \log(20)}$$

e^x es continua en $x=0$, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (20^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x \cdot \log(20)} - 1) = e^{0 \cdot \log(20)} - 1 = e^0 - 1 = \underline{0}$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow 0} x = \underline{0}$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log(20)} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[e^{x \log(20)} - 1]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log(20)} \cdot \log(20)}{1} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \log(20)} \cdot \log(20) = e^0 \cdot \log(20) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{20^x - 1}{x} = \log(20)}}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{-\sin x} - 1}{e^x - 1} \quad \frac{0}{0}$

$$3 > 0 \Rightarrow 3^{-\sin x} = e^{-\sin x \cdot \log(3)}$$

Además e^x es continua en $x=0$, así que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^{-\sin x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-\sin x \cdot \log(3)} - 1)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (3^{-\sin x} - 1) &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-\sin x \cdot \log(3)} - 1) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\sin x \cdot \log(3)} - 1 = e^0 - 1 = \underline{0}\end{aligned}$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = \underline{0}$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sin x \cdot \log(3)}}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[e^{-\sin x \cdot \log(3)}]^1}{[e^x - 1]^1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sin x \cdot \log(3)} \cdot (-\log(3) \cos x)}{e^x} \quad \text{todas continuas en } x=0 \\ &= \frac{e^{-\sin(0) \cdot \log(3)} \cdot (-\log(3) \cos(0))}{e^0} \\ &= e^0 (-\log(3))\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{-\sin x} - 1}{e^x - 1} = \underline{-\log(3)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^x$$

Como $x \rightarrow \infty$, basta considerar $x > 1$

$$\Rightarrow e^x > e^1 > 1 \quad \Rightarrow e^x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0$$

$$\text{Así, } \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^x = e^{x \log \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)}$$

Analizemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \frac{0}{0}$$

donde $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, además

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \stackrel{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x &= \infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} &= 0 \end{aligned}$$

y $\log(x)$ es continua en $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = \log(1) = \underline{0}$$

Aplicando L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)\right]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)'}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} - \frac{x^2 \left[\frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \right]}{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} - \frac{x^2 \cdot \frac{e^x [\cancel{e^x + 1} - (\cancel{e^x} - 1)]}{(e^x + 1)^2}}{\frac{e^x - 1}{\cancel{e^x + 1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} - \frac{2x^2 e^x}{(e^x + 1)(e^x - 1)} \cdot \frac{\frac{1}{(e^x)^2}}{\frac{1}{(e^x)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 \frac{x^2}{e^x} \cdot \frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x + 1}{e^x} \cdot \frac{e^x - 1}{e^x}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x} \cdot \frac{e^x - 1}{e^x}}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 \frac{x^2}{e^x}}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = 0, \quad \text{y } e^x \text{ es continua en } x = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)} = e^0 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L \quad \text{y } f \text{ continua en } L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f(L)}$$

Ejercicio Hallar todas las funciones continuas f que satisfacen

$$f'''(x) = f''(x)$$

Sol. Sea $g(x) = f''(x)$, la cual es derivable y

$$g'(x) = f'''(x) = f''(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = g(x) \quad \text{para cada } x$$

$$\Rightarrow f''(x) = g(x) = c e^x \quad \text{para alguna } c \in \mathbb{R}$$

Veamos que $f'(x) = b + c e^x$. Definimos la función derivable

$$h(x) = f'(x) - c e^x$$

$$\Rightarrow h'(x) = f''(x) - c e^x = f''(x) - f''(x) = 0$$

$\Rightarrow h'(x) = 0$, por lo que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) - ce^x = h(x) = b$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = b + ce^x, \text{ con primitiva } bx + ce^x$$

Ahora vemos que $f(x) = a + bx + ce^x$. Definimos la función derivable $i(x) = f(x) - bx - ce^x$

$$\Rightarrow i'(x) = f'(x) - b - ce^x = f'(x) - f'(x) = 0$$

$\Rightarrow i'(x) = 0$, por lo que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) - bx - ce^x = i(x) = a$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a + bx + ce^x$$

Hemos probado que todas las funciones continuas que satisfacen la ecuación tienen la forma $a + bx + ce^x$, ahora vemos que estas funciones satisfacen la ecuación:

$$\text{Si } f(x) = a + bx + ce^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = b + ce^x$$

$$\Rightarrow f''(x) = ce^x \quad \text{y} \quad f'''(x) = ce^x$$

$$\therefore f'''(x) = f''(x)$$

Ejercicio Hallar todas las funciones continuas que satisfacen

$$\int_x^0 f(t) dt = e^{-x} + 1$$

Sol. Supongamos que existe una función continua f que satisface la ecuación. Como f es continua, aplicamos 1ª TFC:

$$-f(x) = \left[\int_x^0 f(t) dt \right]' = [e^{-x} + 1]' = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x}$$

Veamos que f satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} \int_x^0 e^{-t} dt &= [-e^{-t}] \Big|_x^0 \\ &= [-e^{-0} - (-e^{-x})] = e^{-x} - 1 \end{aligned}$$

No existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{-x} - 1 = e^{-x} + 1 \quad (\Rightarrow -1 = 1 \quad \nabla)$$

$\therefore$ No existe alguna función continua f que satisfaga la ecuación.

• Otro argumento:

Si existiera tal función f , podemos evaluar la ecuación en $x=0$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^0 f(t) dt = e^{-0} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow 0 = 1 \quad \nabla$$

31-03-2022 Ejercicio. Muestra que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = 1$

Sol. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos(0) = 1$, existe $\delta > 0$

tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|\cos x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$

Si $x > 0$ es tal que $0 < x < \delta \Rightarrow 0 < |x| < \delta$

$$\Rightarrow \dots \left| x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon x}{2\delta} + Ix + x \quad I = \left| \int_\delta^1 \frac{\cos t - 1}{t^2} dt \right|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \times$$

↑
No sabemos que este límite existe.

$$\text{Sea } \delta' = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{2(I+1)} \right\} > 0$$

Si $x > 0$ es tal que $0 < x < \delta' \Rightarrow 0 < |x| < \delta$

$$\Rightarrow \left| x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} - \underbrace{\frac{\varepsilon x}{2\delta}}_{< 0} + Ix + x$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + (I+1)x \quad x < \delta' \leq \frac{\varepsilon}{2(I+1)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \cancel{(I+1)} \frac{\varepsilon}{\cancel{2(I+1)}} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = 1$$

Ejercicio. Encuentra $(f^{-1})'(0)$ si $f(x) = \int_x^0 (\cos(\cos t) - 1) dt$

¿De qué otra manera se puede probar que f es inyectiva?

Demostrar que $f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$ al rededor de 0