

## Ejercicios con integrales impropias

jueves, 24 de marzo de 2022

**Ejercicio.** Sean  $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables sobre  $[a, b]$  p. c.  $b > a$ , tales que  $f(x) \geq 0$  y  $g(x) > 0$  para cada  $x \in [a, \infty)$ . Prueba que si

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$ , entonces  $\int_a^\infty g(x) dx$  converge si y solo si  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge

**Sol.** Sea  $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ . Por hipótesis existe  $K > a$  tal que si  $x > K$  entonces

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \frac{L}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}L, \quad g(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2}L \cdot g(x) \quad \text{p. c. } x \in [K, \infty) \quad (*)$$

$\Rightarrow$  Supongamos que  $\int_a^\infty g(x) dx$  converge

$$\Rightarrow \int_a^\infty \frac{3}{2}L g(x) dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \text{Existe } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{3}{2}L g(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \int_a^K \frac{3}{2}L g(x) dx + \int_K^b \frac{3}{2}L g(x) dx \right),$$

y también existe  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^K \frac{3}{2}L g(x) dx$  (pues no depende de  $b$ )

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_K^b \frac{3}{2}L g(x) dx \text{ existe, es decir, } \int_K^\infty \frac{3}{2}L g(x) dx \text{ converge}$$

comparación, (\*)  $\Rightarrow \int_K^\infty f(x) dx$  converge

Así,  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^K f(x) dx$  y  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_K^b f(x) dx$  existe

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^K f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_K^b f(x) dx \text{ existe}$$

$$\therefore \int_a^\infty f(x) dx \text{ converge}$$

⇐ Supongamos que  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \int_a^k f(x) dx + \int_k^b f(x) dx \right) \text{ y } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^k f(x) dx \text{ existen}$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_k^b f(x) dx \text{ existe, es decir, } \int_k^\infty f(x) dx \text{ converge}$$

comparación, (\*)

$$\Rightarrow \int_k^\infty \frac{1}{L} g(x) dx \text{ converge, y } \frac{1}{L} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_k^\infty \frac{1}{L} \left( \frac{1}{L} g(x) \right) dx = \int_k^\infty g(x) dx \text{ converge}$$

$$\text{Así, } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_k^b g(x) dx \text{ y } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^k g(x) dx \text{ existen}$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \int_k^b g(x) dx + \int_a^k g(x) dx \right) \text{ existe}$$

$$\therefore \int_a^\infty g(x) dx \text{ converge}$$

**Ejercicio.** Sea  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función no acotada e integrable sobre  $[c, b]$

p.c.  $c \in (a, b]$ , tal que  $f(x) \geq 0$  para cada  $x \in (a, b]$ . Si  $\int_a^b f(x) dx$  converge

y  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $\int_a^b k f(x) dx$  converge y

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

**Dem. Tarea** ■

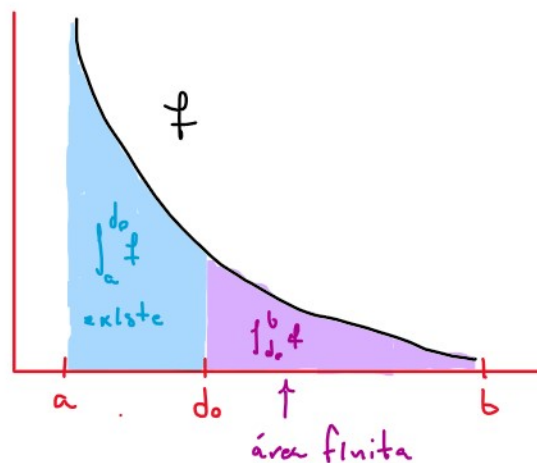
**Ejercicio.** Sean  $f, g: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones no acotadas e integrables sobre  $[c, b]$  p.c.  $c \in (a, b]$ , tales que  $f(x) \geq 0$  y  $g(x) > 0$  para cada  $x \in (a, b]$

- 1) Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$ , entonces  $\int_a^b g(x) dx$  converge si y solo si  $\int_a^b f(x) dx$  converge
- 2) Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  y  $\int_a^b g(x) dx$  converge, entonces  $\int_a^b f(x) dx$  converge.
- 3) Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$  y  $\int_a^b f(x) dx$  converge, entonces  $\int_a^b g(x) dx$  converge

**Dem. Tarea ■**

**Ejercicio** Sea  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función no acotada en  $(a, b]$  e integrable en  $[c, d]$  para cada  $c \in (a, b]$ . Son equivalentes:

- 1)  $\int_a^b f(x) dx$  converge;
- 2) existe  $d_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\int_a^{d_0} f(x) dx$  converge;
- 3)  $\int_a^d f(x) dx$  converge para cada  $d \in (a, b]$ .



**Sol.**

1  $\Rightarrow$  2 Supongamos que  $\int_a^b f(x) dx$  converge

Sea  $d_0 = b \Rightarrow d_0 \in (a, b]$  y  $\int_a^{d_0} f(x) dx$  converge.

2  $\Rightarrow$  3 Supongamos que existe  $d_0 \in (a, b]$  tal que  $\int_a^{d_0} f(x) dx$  converge

Sea  $d \in (a, b]$  tal que  $d \neq d_0$ .

P.D.  $\int_a^d f(x) dx$  converge

Por hipótesis,  $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{d_0} f(x) dx$  existe, y

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^d f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \left( \int_c^{d_0} f(x) dx + \int_{d_0}^d f(x) dx \right)$$

Pero  $f$  es integrable sobre  $[d_0, d]$  (o  $[d, d_0]$ ), así que  $\int_{d_0}^d f(x) dx$

Pero  $f$  es integrable sobre  $[d_0, d]$  (o  $[d, d_0]$ ), esto es, existe y no depende de  $c$

$$\Rightarrow \lim_{c \rightarrow a^+} \int_{d_0}^d f(x) dx = \int_{d_0}^d f(x) dx \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^d f(x) dx \text{ existe}$$

$$\therefore \int_a^d f(x) dx \text{ converge}$$

3  $\Rightarrow$  1 Ya que  $b \in (a, b]$ , se sigue de la hipótesis que  $\int_a^b f(x) dx$  converge.

**Ejercicios.** Determina si las siguientes integrales impropias convergen.

1)  $\int_0^1 \frac{x^2+5}{x^5} dx$  diverge

• **Demostración usando Ejercicio 12 (a)**

Definimos  $f, g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x^5} \quad y \quad g(x) = \frac{1}{x^3} \quad \leftarrow \text{ mismo denominador}$$

Notamos que  $f(x) > 0$  y  $g(x) > 0$  p. c.  $x \in (0, 1]$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+5) = 5 > 0$$

Ahora veamos que  $\int_0^1 g(x) dx$  diverge.

Definimos  $G: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $G(x) = -\frac{1}{4x^4}$ . Así,

$$G(x) = -\frac{1}{4}(-4) \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} = g(x) \quad \text{p. c. } x \in (0, 1]$$

• **2º TFC**  
 $\Rightarrow \int_c^1 \frac{1}{x^3} dx = G(1) - G(c) = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4c^4}\right) \quad \text{p. c. } c \in (0, 1]$

$$\Rightarrow \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^3} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{4c^4} - \frac{1}{4} \right) = \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(x) dx \text{ diverge}$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2+5}{x^3} dx \text{ diverge}$$

• Demostración usando criterio de comparación

$$\frac{x^2+5}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} + \frac{5}{x^3} = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}$$

Sean  $f, g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x^3} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x^2},$$

y notamos que  $f(x) > 0$  y  $g(x) > 0$  p.c.  $x \in (0, 1]$

Ahora bien, sea  $x \in (0, 1] \Rightarrow 0 < x \leq 1$  y  $x^2 > 0$

$$\Rightarrow 0 < x^3 \leq x^2 \quad \text{y} \quad x^3 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3} \quad \text{y} \quad 0 < \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^3} = f(x) \text{ p.c. } x \in (0, 1]$$

Pero  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  diverge

$$\xRightarrow{\text{comparación}} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2+5}{x^3} dx \text{ diverge}$$

2)  $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$  converge

Definimos  $f, g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}, \quad \leftarrow \text{ mismo denominador}$$

y notamos que  $f(x) > 0$  y  $g(x) > 0$  p.c.  $x \in (0, 1]$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 > 0}$$

$$\text{Sea } x \in (0, 1] \Rightarrow 0 < x \quad \vee \quad 0 < x^2$$

$$\Rightarrow 0 < x < x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{p. c. } x \in (0, 1]$$

$$\text{Pero } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge} \xRightarrow{\text{comparación}} \underline{\int_0^1 g(x) dx \text{ converge}}$$

$$\stackrel{12(a)}{\Rightarrow} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx \text{ converge}$$

Observación:  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  diverge

$$3) \int_0^5 \frac{\sqrt{x}+7}{3x} dx \text{ diverge}$$

$$\text{Sea } x \in (0, 1] \Rightarrow 0 < 1 < \sqrt{x}+7 \quad \vee \quad \frac{1}{3x} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x} < \frac{\sqrt{x}+7}{3x} \quad \text{p. c. } x \in (0, 1]$$

$$\text{Pero } \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{3x} dx \text{ diverge}$$

$$\stackrel{\text{comparación}}{\Rightarrow} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+7}{3x} dx \text{ diverge, } 1 \in (0, 5]$$

$$\stackrel{\text{ejercicio anterior}}{\Rightarrow} \int_0^5 \frac{\sqrt{x}+7}{3x} dx \text{ diverge}$$