

## Integrales impropias (parte 4)

jueves, 24 de marzo de 2022

**Ejercicio.** Sean  $f, g: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones integrables sobre  $[a, b]$  p. c.

$a < b$ , tales que  $f(x) \geq 0$  y  $g(x) > 0$  para cada  $x \in (-\infty, b]$ . Prueba que

1) Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  y  $\int_{-\infty}^b g(x) dx$  converge, entonces  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  converge.

2) Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$  y  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  converge, entonces  $\int_{-\infty}^b g(x) dx$  converge

**Dem 1)** Sea  $\varepsilon = 1 > 0$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , existe  $K < b$  tal que si  $x < K$  entonces

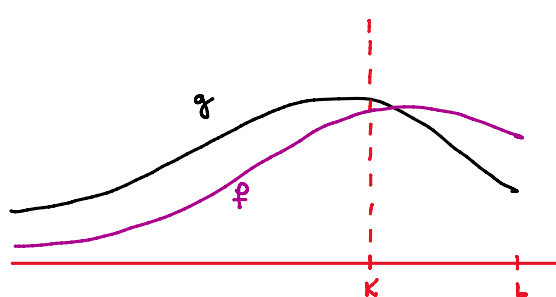
$$\left| 0 - \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 1, \quad |g(x)| \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = |f(x)| < |g(x)| = g(x)$$

$$\Rightarrow \overset{f(x) \geq 0}{f(x)} = |f(x)| < \overset{g(x) > 0}{|g(x)|} = g(x)$$

$$\Rightarrow f(x) < g(x) \quad \text{p. c. } x \in (-\infty, K)$$



Ahora bien, sea  $a < b$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x) dx = \int_a^K g(x) dx + \int_K^b g(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^b g(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b g(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \int_a^K g(x) dx + \underbrace{\int_K^b g(x) dx}_{\text{no depende de } a} \right)$$

Pero  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b g(x) dx$  y  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^K g(x) dx$  existen

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^K g(x) dx \text{ existe, es decir, } \int_{-\infty}^K g(x) dx$$

$$\overset{\text{comparación}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^K f(x) dx \text{ converge, es decir, } \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^K f(x) dx$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \int_a^k f(x) dx + \int_k^b f(x) dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^k f(x) dx + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_k^b f(x) dx \in \mathbb{R} \\ \therefore \int_{-\infty}^b f(x) dx \text{ converge } \square\end{aligned}$$

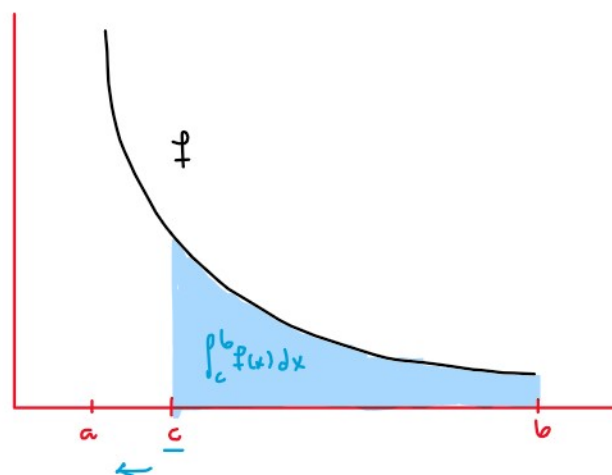
2) Tarea

## Integrales impropias de tipo II

**Definición.** Sean  $a < b$  y  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función no acotada e integrable sobre  $[c, b]$  para cada  $c \in (a, b]$ . Definimos la integral impropia de  $f$  en  $(a, b]$  como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

Si el límite anterior existe y es un número real, entonces diremos que la integral impropia  $\int_a^b f(x) dx$  converge, y en otro caso diremos que diverge.



**Lema.** Sea  $F: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función decreciente. Entonces  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$  existe si y solo si  $F$  está acotada superiormente. En este caso,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \sup \{ F(x) \mid x \in (a, b] \}$$

**Dem.**  $\Rightarrow$  | Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = L \in \mathbb{R}$ . Sea  $\varepsilon = 1 > 0$

$\Rightarrow$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x \in (a, b]$  y  $x - a < \delta$ ,

$$\text{entonces } |L - F(x)| < \varepsilon = 1$$

$$\Rightarrow F(x) - L \leq |L - F(x)| < 1$$

$$\Rightarrow F(x) < 1 + L \quad \text{si } x - a < \delta$$

Sea  $x \in (a, b]$ .

$$\sim \text{ Si } x \in (a, a + \delta) \Rightarrow x < a + \delta \Leftrightarrow x - a < \delta \\ \Rightarrow F(x) < 1 + L$$

$$\sim \text{ Si } x \in [a + \delta, b], \text{ tomamos } x_0 \in (a, a + \delta)$$

Como  $F$  es decreciente y  $x_0 < x$

$$\Rightarrow F(x) \leq F(x_0) < 1 + L$$

$\therefore F$  está acotada superiormente por  $1 + L$ .

$\Leftarrow$  | Ahora supongamos que  $F$  está acotada superiormente

$$\text{Sea } \alpha = \sup \{ F(x) \mid x \in (a, b] \}$$

$$\text{P.D. } \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, b] (x - a < \delta \Rightarrow |\alpha - F(x)| < \varepsilon)$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Por definición de  $\alpha$ , existe  $x_0 \in (a, b]$  tal que

$$\alpha - \varepsilon < F(x_0) \Rightarrow \alpha - F(x_0) < \varepsilon$$

Definimos  $\delta = x_0 - a > 0$  y sea  $x \in (a, a + \delta)$ ,

$$\text{es decir, } x < a + \delta \Leftrightarrow x - a < \delta = x_0 - a$$

$$\Rightarrow x < x_0$$

Como  $F$  es decreciente  $\Rightarrow F(x) \geq F(x_0)$

$$\Rightarrow -F(x) \leq -F(x_0)$$

$$\Rightarrow \alpha - F(x) \leq \alpha - F(x_0) < \varepsilon$$

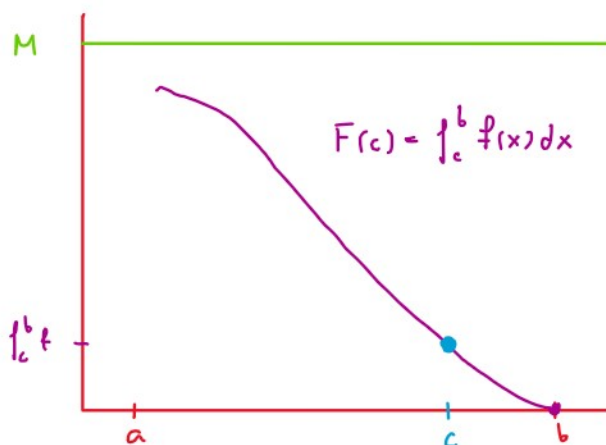
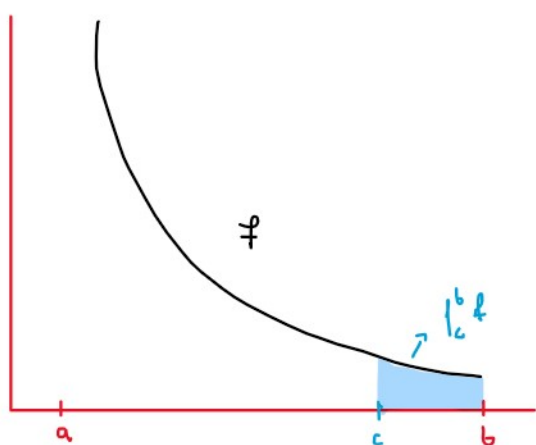
$$\text{Pero } \alpha = \sup \{F(x) \mid x \in (a, b]\} \rightarrow \alpha \geq F(x)$$

$$\Rightarrow \alpha - F(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow |\alpha - F(x)| = \alpha - F(x) < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \alpha \quad \blacksquare$$

**Corolario.** Si  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no acotada, no negativa e integrable sobre  $[c, b]$  para cada  $c \in (a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x) dx$  converge si y solo si existe  $M > 0$  tal que  $\int_c^b f(x) dx \leq M$  para cada  $c \in (a, b]$ .



**Dem.** Definimos  $F: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $F(c) = \int_c^b f(x) dx$ .

Sean  $c_1, c_2 \in (a, b]$  tales que  $a < c_1 < c_2 \leq b$

$$\Rightarrow F(c_1) = \int_{c_1}^b f(x) dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + F(c_2)$$

$$\geq F(c_2),$$

coto pues  $f(x) > 0$  p.c.  $x \in [c_1, c_2]$ , es decir,  $\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx > 0$

$\Rightarrow F(c_1) > F(c_2)$  cuando  $c_1 < c_2$

$\Rightarrow F$  es decreciente

Entonces

$\int_a^b f(x) dx$  converge  $\Leftrightarrow \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} F(c)$  existe

*Lema*

$\Leftrightarrow F$  está acotada superiormente

$\Leftrightarrow$  existe  $M > 0$  t.q.  $\int_c^a f(x) dx = F(c) \leq M$  p.c.  $c \in (a, b]$  ■

### Corolario (criterio de comparación)

Sean  $f, g: (a, b] \rightarrow [0, \infty)$  funciones no acotadas superiormente en  $(a, b]$ , integrables sobre  $[c, b]$  para cada  $c \in (a, b]$  y tales que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  para cada  $x \in (a, b]$ .

1) Si  $\int_a^b g(x) dx$  converge, entonces  $\int_a^b f(x) dx$  también converge.

2) Si  $\int_a^b f(x) dx$  diverge, entonces  $\int_a^b g(x) dx$  también diverge.

**Dem 1)** Como  $\int_c^b g(x) dx$  converge, por el corolario anterior existe  $M > 0$  tal que

$$\int_c^b f(x) dx \leq \int_c^b g(x) dx \leq M \quad \text{p.c. } c \in (a, b]$$

$$\Rightarrow \int_c^b f(x) dx \leq M \quad \text{p.c. } c \in (a, b]$$

*Corolario*

$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx$  converge.

2) Es la contrapositiva de (1) ■

Ejemplos. Determina si las siguientes integrales impropias convergen.

1)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$  converge.

Sean  $f, g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$  y  $g(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$

Notemos que  $f$  y  $g$  son continuas, y

$$g'(x) = \left(\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right)' = \cancel{\frac{3}{2}} \cdot \cancel{\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}} = f(x) \quad \text{p. c. } x \in (0, 1]$$

$\stackrel{\text{2}^\circ \text{TFC}}{\Rightarrow} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_c^1 f(x) dx = g(1) - g(c) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} c^{\frac{2}{3}}, \quad c \in (0, 1]$

$$\Rightarrow \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2} - \underbrace{\frac{3}{2} c^{\frac{2}{3}}}_{\text{continua en } 0} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \text{ converge}$$

2)  $\int_0^{20} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

Como  $\frac{1}{\sqrt[4]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  para cada  $x \in (0, 20]$  y  $\int_0^{20} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$  converge

comparación  $\Rightarrow \int_0^{20} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$  converge

• Probamos que  $\int_0^{20} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$  converge, vea ver  $\int_0^{20} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

•  $x^{\frac{1}{4}} < x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} < \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Definimos  $f, g: (0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$  y  $g(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}$

Ambas funciones son continuas y

$$g'(x) = \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{1}{4}} = f(x) \quad \text{p. c. } x \in (0, 20]$$

$\stackrel{\text{2}^\circ \text{TFC}}{\Rightarrow} \int_c^{20} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int_c^{20} f(x) dx = g(20) - g(c) = \frac{4}{3} (20)^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3} c^{\frac{3}{4}}, \quad c \in (0, 1]$

$$\Rightarrow \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{20} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( \frac{4}{3} (20)^{3/4} - \underbrace{\frac{4}{3} c^{3/4}}_{\text{continue en 0}} \right) = \frac{4}{3} (20)^{3/4} \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \int_0^{20} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx \text{ converge.}$$