

Integrales impropias (parte 3)

miércoles, 23 de marzo de 2022

Lema. Sea $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[a, b]$ p. c. $b > a$,
y sea $k \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^\infty f(x) dx$ converge, entonces $\int_a^\infty k f(x) dx$ converge
y

$$\int_a^\infty k f(x) dx = k \int_a^\infty f(x) dx$$

Dem. Como $\int_a^\infty f(x) dx$ converge, $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existe.

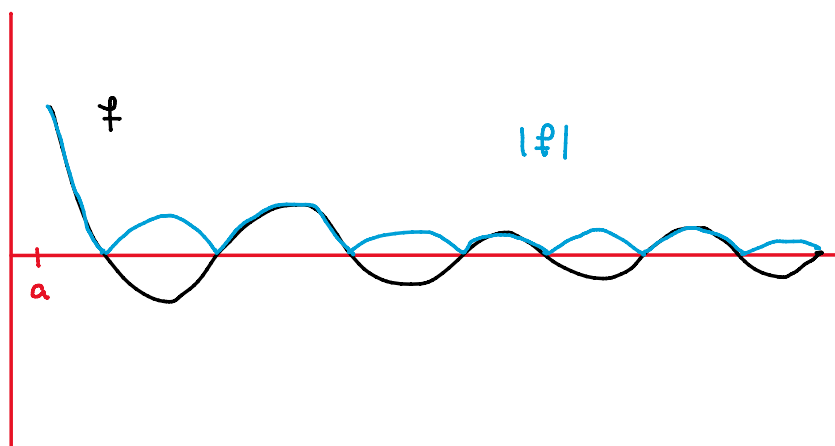
$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b k \cdot f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} k \cdot \int_a^b f(x) dx = k \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = k \cdot \int_a^\infty f(x) dx$$

$\uparrow$ f integrable en $[a, b]$ $\uparrow$ el límite existe

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b k \cdot f(x) dx \text{ existe}$$

$$\therefore \int_a^\infty k f(x) dx \text{ converge.}$$

Corolario. Sea $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[a, b]$ p. c.
 $b > a$. Si $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ converge.



Dem. Sea $x \in [a, \infty) \Rightarrow -f(x) \leq | -f(x) | = |f(x)|$
 $\Rightarrow |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)| \quad \text{p. c. } x \in [a, \infty)$

Por hipótesis $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty 2|f(x)| dx$ converge ^{Lema}

Ahora bien, notemos que $|f(x)| \geq f(x)$ y $|f(x)| \geq 0$

$$\Rightarrow |f(x)| - f(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad 2|f(x)| \geq 0$$

Esto es, las funciones $|f| - f$ y $2|f|$ son no negativas y

$\int_a^\infty 2|f(x)| dx$ converge

^{comparación}
 $\Rightarrow \int_a^\infty (|f(x)| - f(x)) dx$ converge

Sea $b > a$

$$\Rightarrow f(x) = |f(x)| - (|f(x)| - f(x)) \quad \text{p. c. } x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b (|f(x)| - f(x)) dx$$

esto pues f , $|f|$ y $|f| - f$ son integrables sobre $[a, b]$.

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b (|f(x)| - f(x)) dx \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x)| dx - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b (|f(x)| - f(x)) dx$$

$$= \int_a^\infty |f(x)| dx - \int_a^\infty (|f(x)| - f(x)) dx \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \text{ existe}$$

$$\therefore \int_a^\infty f(x) dx \text{ converge} \quad \square$$

Ejemplo. Determina si $\int_1^{\infty} \frac{\sin x^4}{x^2} dx$ converge Si

Notamos que $\sin x^4 > 0$ y $x^2 > 0$ p.c. $x \in [1, \infty)$

$\Rightarrow \frac{\sin x^4}{x^2}$ es no negativa, continua e integrable sobre $[1, b]$ p.c. $b > 1$

Además $|\sin x^4| \leq 1$ p.c. $x \in [1, \infty)$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sin x^4}{x^2} \right| = \frac{|\sin x^4|}{|x^2|} = \frac{|\sin x^4|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{p.c. } x \in [1, \infty)$$

Devo $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge y $\left| \frac{\sin x^4}{x^2} \right|$ es no negativa

comparación $\Rightarrow \int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x^4}{x^2} \right| dx$ converge

corolario $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin x^4}{x^2} dx$ converge

Teorema. Sean $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables sobre $[a, b]$ p.c.

$b > a$, tales que $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para cada $x \in [a, \infty)$. Se cumple que:

1) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ y $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge.

2) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ y $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge.

Dem. Teorema

Ejercicios. Determina si las siguientes integrales impropias convergen:

1) $\int_1^{\infty} \frac{6x}{x^5+7} dx$ converge

$$\text{Sea } x \in [1, \infty) \Rightarrow 6x > 0 \quad \text{y} \quad x^5 + 7 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{6x}{x^5+7} > 0 \quad \text{p. c. } x \in [1, \infty)$$

es decir, la función es no negativa.

$$\text{Además si } x \in [1, \infty) \Rightarrow x^3 \leq x^5 < x^5 + 7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^5+7} < \frac{1}{x^3} \quad \text{y} \quad 6x > 0, \quad x \in [1, \infty)$$

$$\Rightarrow \frac{6x}{x^5+7} < \frac{6x}{x^3} = \frac{6}{x^2} \quad \text{p. c. } x \in [1, \infty)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \quad \xRightarrow{\text{Lema}} \int_1^{\infty} \frac{6}{x^2} dx \text{ converge} \quad - \quad \frac{6}{x^2} \text{ no negativa}$$

$$\xRightarrow{\text{comparación}} \int_1^{\infty} \frac{6x}{x^5+7} dx \text{ converge}$$

2) $\int_1^{\infty} \frac{x+3}{x^4+2x+1} dx$ converge

Definimos $f, g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \frac{x+3}{x^4+2x+1} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^2}{x^4+2x+1}$$

Ambas funciones son integrables sobre $[1, b]$ p. c. $b > 1$ (porque son continuas), $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$ p. c. $x \in [1, \infty)$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+3}{\cancel{x^4+2x+1}}}{\frac{x^2}{\cancel{x^4+2x+1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Ahora veamos que $\int_1^{\infty} g(x) dx$ converge.

$$\text{Si } x \in [1, \infty) \Rightarrow 0 < 2x+1$$

$$\Rightarrow x^4 < x^4 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^4 + 2x + 1} < \frac{1}{x^4} \quad , \quad x^2 > 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{x^4 + 2x + 1} < \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \quad \text{p.c. } x \in [1, \infty)$$

Pero $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge $\xRightarrow{\text{comparación}} \int_1^{\infty} g(x) dx$ converge

$\xRightarrow{\text{Teorema}} \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{x+3}{x^4 + 2x + 1} dx$ converge

* Se pueden enunciar y probar todos los criterios ya vistos pero para funciones definidas sobre intervalos de la forma $(-\infty, b]$

Teorema. (criterio de comparación)

Sean $f, g: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones no negativas en $(-\infty, b]$ e integrables sobre $[a, b]$ para cada $a < b$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in (-\infty, b]$.

1) Si $\int_{-\infty}^b g(x) dx$ converge, entonces $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ converge.

2) Si $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^b g(x) dx$ diverge.

Ejercicio. Sean $f, g: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables sobre $[a, b]$ p. c. $a < b$, tales que $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para cada $x \in (-\infty, b]$. Prueba que

- 1) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ y $\int_{-\infty}^b g(x) dx$ converge, entonces $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ converge.
- 2) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ y $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ converge, entonces $\int_{-\infty}^b g(x) dx$ converge.

Dem 1) Sea $\varepsilon = 1 > 0$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, existe $K < b$ tal que si $x < K$ entonces

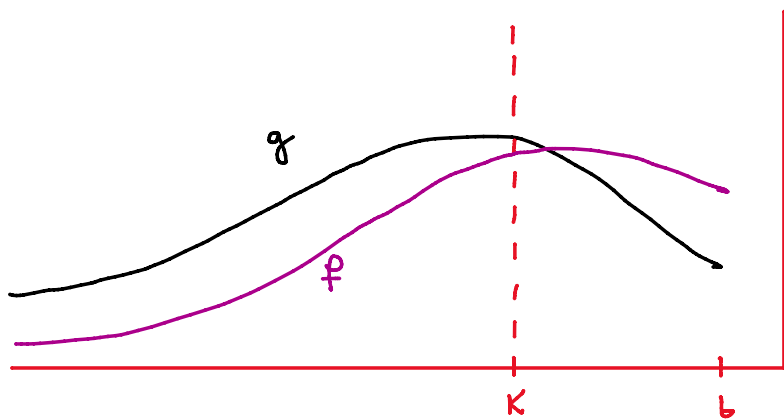
$$\left| 0 - \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 1, \quad |g(x)| \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = |f(x)| < |g(x)| = g(x)$$

$$\Rightarrow \overset{f(x) \geq 0}{f(x)} = |f(x)| < \overset{g(x) > 0}{|g(x)|} = g(x)$$

$$\Rightarrow f(x) < g(x) \quad \text{p. c. } x \in (-\infty, K)$$



$$\int_{-\infty}^b g(x) dx \text{ converge y } K < b$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^K g(x) dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^K f(x) dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^b f(x) dx \text{ converge}$$