

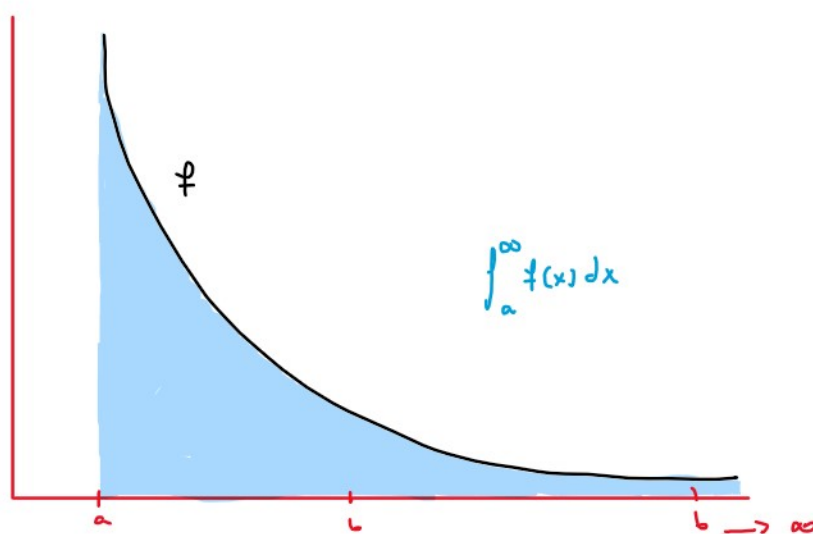
Integrales impropias (parte 2)

sábado, 19 de marzo de 2022

Definición. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[a, b]$ para cada $b > a$. Definimos la integral impropia de f en $[a, \infty)$ como

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad \text{intervalo no acotado}$$

Si el límite anterior existe y es un número real, entonces diremos que la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge, y en otro caso diremos que diverge.



Ejemplos

1) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

2) Sea $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

Definimos $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

Notamos que

$$g'(x) = \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = -2 \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \cancel{-2} \left(\cancel{-\frac{1}{2}}\right) x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} = f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{g'(x) = f(x)} \quad \text{p.l. } x \in [1, \infty) \quad \text{y } g \text{ es continua}$$

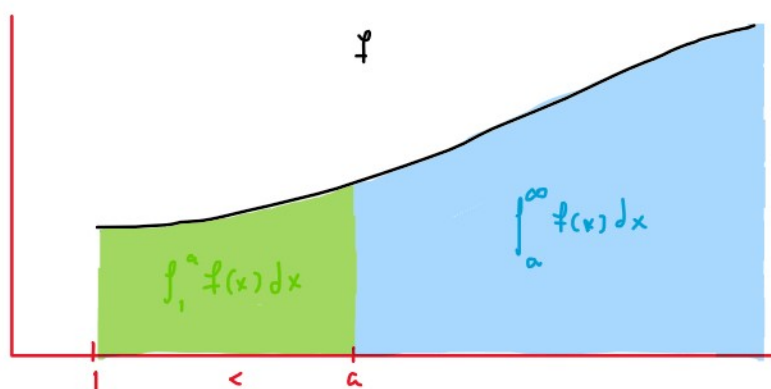
$$\stackrel{\text{ZTC}}{\Rightarrow} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = g(b) - g(1) = -\frac{2}{\sqrt{b}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{b}}, \quad b > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{b}}\right) = 2 - 0 = 2$$

$$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge.}$$

Ejemplo. Sea $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es integrable sobre $[a, b]$ p. c. $b > a$.

Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$, ¿ $\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge, con $a > 1$? Si



$\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge
 $\parallel$
 $\int_1^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$

Supongamos que $\int_a^{\infty} f(x) dx$ converge, es decir,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = I \in \mathbb{R}$$

Sea $b > a$; sabemos que f es integrable sobre $[1, b]$

$$\Rightarrow \int_1^b f(x) dx = \int_1^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\int_1^a f(x) dx}_{\text{no depende de } b} + \int_a^b f(x) dx \right)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^a f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_1^a f(x) dx + I \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge} \quad \nabla$$

$$\therefore \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ diverge}$$

f es no negativa

Proposición. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, \infty)$ e integrable sobre $[a, b]$ para cada $b > a$. Entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ converge si y solo si $(\int_a^n f(x) dx)_{n \geq a}$ está acotada superiormente, y en ambos casos se cumple que

$$\int_a^\infty f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^n f(x) dx \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n > a \right\}.$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} g(b) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K > a (b > K \Rightarrow |L - g(b)| < \varepsilon)$$

Dem $\Rightarrow$ Como $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existe, para $\varepsilon = 1 > 0$ existe $K > a$ tal que si $b > K$ entonces

$$-\left(\int_a^\infty f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right) \leq \left| \int_a^\infty f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon = 1 \quad -a \leq |a|$$

$$\Rightarrow - \int_a^\infty f(x) dx + \int_a^b f(x) dx < 1$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx < 1 + \int_a^\infty f(x) dx \in \mathbb{R} \text{ para cada } b > a$$

En particular, si $n \in \mathbb{N}$ y $n > a$ entonces

$$\int_a^n f(x) dx \leq 1 + \int_a^\infty f(x) dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^n f(x) dx \right)_{n \geq a} \text{ está acotada superiormente}$$

Supongamos que $(\int_a^n f(x) dx)_{n \geq a}$ está acotada superiormente

$\Leftarrow$ Veamos que la sucesión anterior es creciente: sea $n > a$

$$\Rightarrow a \leq n < n+1 \text{ y } f \text{ es integrable sobre } [a, n+1]$$

$$\Rightarrow \int_a^{n+1} f(x) dx = \int_a^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx$$

Sabemos que f es no negativa, es decir, $f(x) \geq 0$ p.c. $x \in [a, n+1]$

$$\Rightarrow \int_a^n f(x) dx \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^n f(x) dx \leq \int_a^{n+1} f(x) dx \quad \text{p.c. } n \geq a$$

Así, $(\int_a^n f(x) dx)_{n \geq a}$ es creciente y está acotada superiormente

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx = \sup \{ \int_a^n f(x) dx \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq a \} = \underline{\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$\text{P.D. } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \geq a (b \geq K \Rightarrow |\alpha - \int_a^b f(x) dx| < \varepsilon)$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como α es la menor cota superior existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $N \geq a$ y

$$\alpha - \varepsilon < \int_a^N f(x) dx$$

$$\Rightarrow \alpha - \int_a^N f(x) dx < \varepsilon$$

Se sigue que si $b > N \geq a$ entonces

$$\int_a^N f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \quad f \text{ no negativa}$$

$$\Rightarrow - \int_a^b f(x) dx \leq - \int_a^N f(x) dx$$

$$\Rightarrow \alpha - \int_a^b f(x) dx \leq \alpha - \int_a^N f(x) dx < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \alpha - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon$$

Por p. 1. existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq b$

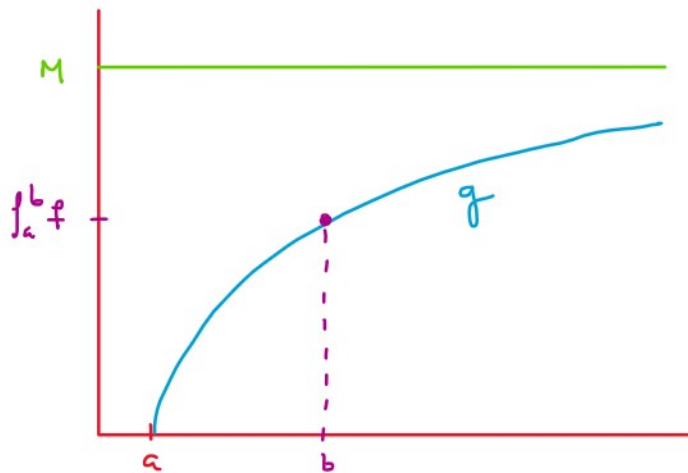
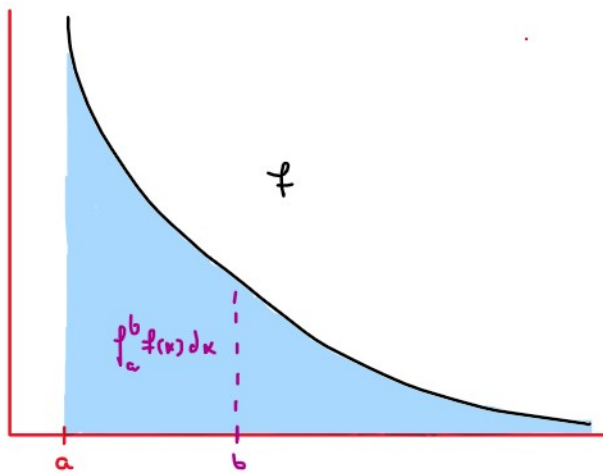
Como α es el supremo, pasa que $\alpha \geq \int_a^n f(x) dx$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha - \int_a^n f(x) dx \leq \alpha - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \alpha - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \int_a^\infty f(x) dx \text{ converge a } \sup \{ \int_a^n f(x) dx \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq a \}$$

Corolario. Si $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no negativa en $[a, \infty)$ e integrable sobre $[a, b]$ para cada $b > a$, entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ converge si y solo si existe $M > 0$ tal que $\int_a^b f(x) dx \leq M$ para cada $b > a$.



$$g(b) = \int_a^b f(x) dx$$

f no negativa $\Rightarrow g$ creciente

g acotada $\Leftrightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} g(b)$ existe

Dem. $\Rightarrow$ Como $\int_a^\infty f(x) dx$ converge, por la proposición anterior existe $M > 0$ tal que $\int_a^n f(x) dx \leq M$ p. c. $n \geq a$.
 Sea $b > a$. Por p. A. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a < b \leq N$
 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^N f(x) dx \leq M$ f no negativa
 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq M$ p. c. $b > a$

$\Leftarrow$ Sea $M > 0$ tal que $\int_a^b f(x) dx \leq M$ p. c. $b > a$

En particular, si $n \in \mathbb{N}$ y $n > a$ entonces

$$\int_a^n f(x) dx \leq M$$

$\Rightarrow \left(\int_a^n f(x) dx \right)_{n \geq a}$ está acotada superiormente

Proposición

$\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ converge $\square$

Corolario (criterio de comparación)

Sean $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones no negativas en $[a, \infty)$ e integrables sobre $[a, b]$ para cada $b > a$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a, \infty)$.

1) Si $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ converge

2) Si $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty g(x) dx$ diverge

Dem 1) Sea $b > a$. Como $f(x) \leq g(x)$ p. c. $x \in [a, b]$, se sigue que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Ya que $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, por el corolario anterior existe $M > 0$

tal que $\int_a^b g(x) dx \leq M$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \leq M \quad \text{p. c. } b > a$$

$\therefore \int_a^\infty f(x) dx$ converge.

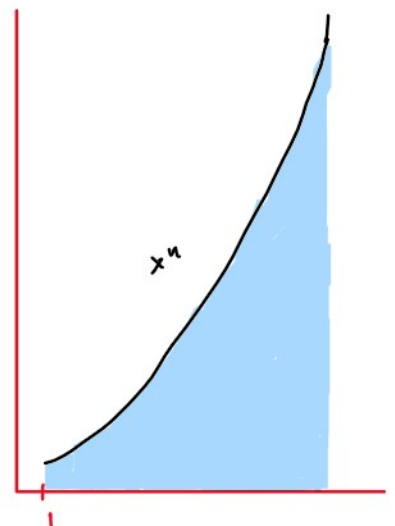
2) Por contrapositiva de (1) $\square$

Ejemplo. $\int_1^\infty x^n dx$ diverge para cada $n \in \mathbb{N}$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$1 \leq x^n \quad \text{p. c. } x \in [1, \infty)$$

$$\Rightarrow \int_1^b 1 dx \leq \int_1^b x^n dx \quad \text{p. c. } b > 1 \quad (*)$$



Ahora bien, sea $M > 0$.

$$\Rightarrow \int_1^{M+2} 1 \, dx = 1 \cdot (M+2 - 1) = M+1 > M$$

$\Rightarrow$ No existe $M > 0$ tal que $\int_1^b 1 \, dx \leq M$ p.c. $b > 1$

$$\Leftrightarrow \int_1^{\infty} 1 \, dx \text{ diverge}$$

De esto y (x), se sigue por criterio de comparación que

$$\int_1^{\infty} x^n \, dx \text{ diverge p.c. } n \in \mathbb{N}.$$

Ejempl.. $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x^2+1} \, dx$ converge.

Notamos que $\frac{1}{2x^2+1} > 0$ para cada $x \in [1, \infty)$, es decir, es una función no negativa. Ahora bien, sea $x \in [1, \infty)$

$$\Rightarrow x^2 > 0 \quad , \quad 1 < 2$$

$$\Rightarrow x^2 < 2x^2 < 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x^2+1} < \frac{1}{x^2} \quad \text{p.c. } x \in [1, \infty)$$

Además la función $g(x) = \frac{1}{x^2}$ es no negativa y ya se probó que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = 1$ converge

$\Rightarrow$ El inciso (1) del criterio de comparación nos dice que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x^2+1} \, dx \text{ converge.}$$