

El segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Si f es integrable en $[a, b]$ y existe $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' = f$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = g(x) \Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

* ¿Podemos aplicar el T.F.C. para calcular $\int_b^a f(x) dx$?

¿ $\int_b^a f(x) dx = g(a) - g(b)$? Sí

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx = - (g(b) - g(a)) = g(a) - g(b)$$

↑
T.F.C.

Es decir, $\int_c^d f(x) dx = g(x) \Big|_c^d = g(d) - g(c)$

sin importar si $c < d$ o $d < c$.

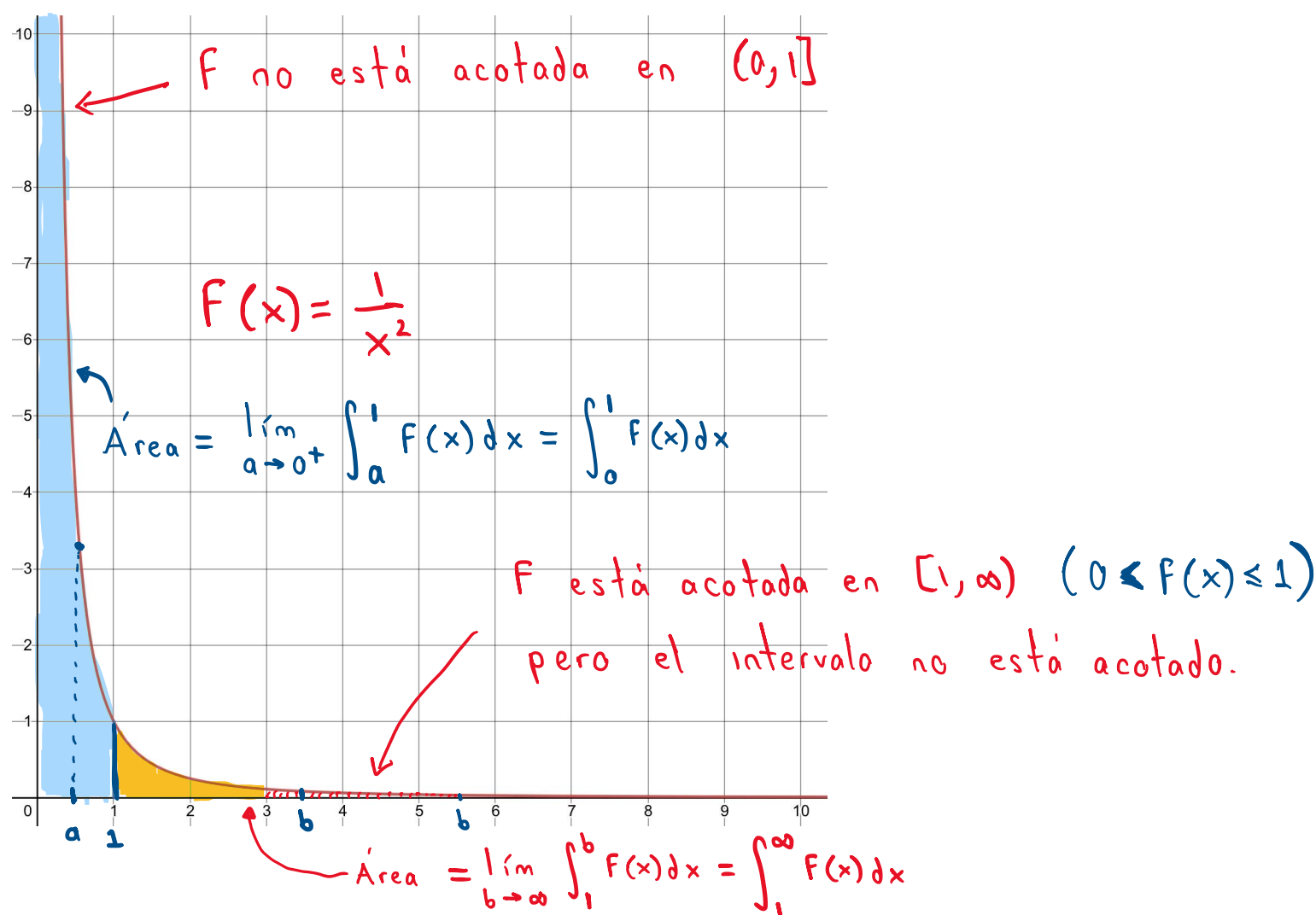
Sea $n \in \mathbb{Q}$, $n \neq -1$. Si $f(x) = x^n$, como $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva de $f(x)$ (es decir, $g'(x) = x^n = f(x)$) en $\mathbb{R}$ si $n > 0$ y en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $n < 0$, por el 2º T.F.C. tenemos que si $a, b > 0$, entonces

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

Hasta el momento hemos calculado integrales de Funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados $[a, b]$.

¿Cuál es el área debajo de la gráfica de $F(x) = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo $[1, \infty)$? ¿Y en el intervalo $(0, 1]$?

¿De qué manera podemos calcular estas áreas?



Definición Sean $a \in \mathbb{R}$ y $F: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una Función tal que para cada $b > a$ la función F es integrable en $[a, b]$. Definimos la integral impropia de F en $[a, \infty)$ como

$$\int_a^\infty F(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b F(x) dx.$$

Si el límite anterior existe y es un número real, entonces diremos que la integral impropia $\int_a^\infty F(x) dx$ converge. En otro caso diremos que la integral impropia diverge.

Definición Sean $b \in \mathbb{R}$ y $F: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una Función tal que para cada $a < b$ la función F es integrable en $[a, b]$.

Definimos la integral impropia de F en $(-\infty, b]$ como

$$\int_{-\infty}^b F(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b F(x) dx.$$

Si el límite anterior existe y es un número real, entonces diremos que la integral impropia $\int_{-\infty}^b F(x) dx$ converge. En otro caso diremos que la integral impropia diverge.

Definición Sean $a < b$ y $F: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una Función no acotada tal que para cada $c \in (a, b]$ la función F es integrable en $[c, b]$.

Definimos la integral impropia de F en $(a, b]$ como

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b F(x) dx$$

Si el límite anterior existe y es un número real, entonces diremos que la integral impropia $\int_a^b F(x) dx$ converge. En otro caso diremos que la integral impropia diverge.

* Si F está acotada en $(a, b]$ y $F(a)$ está definida (sin importar el valor de $F(a)$), sabemos que F es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b F(x) dx \quad (\text{Ejercicio visto con Daniel o de la Guía I}).$$

Definición Sean $a < b$ y $F: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada tal que para cada $c \in [a, b)$ la función F es integrable en $[a, c]$. Definimos la integral impropia de F en $[a, b)$ como

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c F(x) dx$$

Si el límite anterior existe y es un número real, entonces diremos que la integral impropia $\int_a^b F(x) dx$ converge. En otro caso diremos que la integral impropia diverge.

Integrales impropias de primera especie o de tipo I:

Funciones acotadas en intervalos no acotados

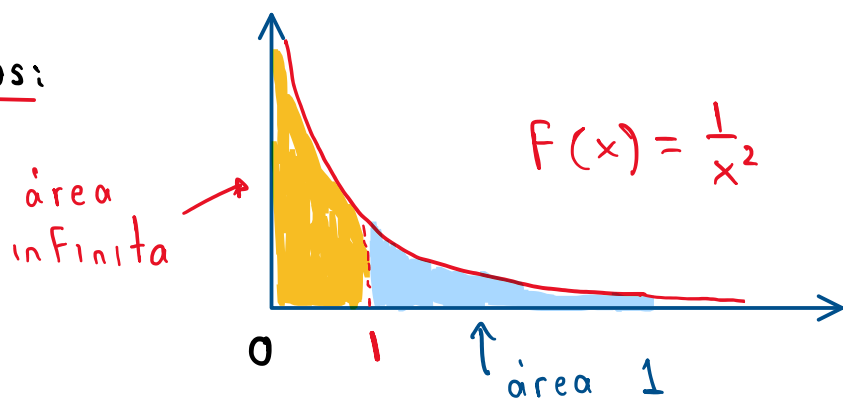
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \int_a^\infty F(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b F(x) dx. \\ \bullet \int_{-\infty}^b F(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b F(x) dx. \end{array} \right.$$

Integrales impropias de segunda especie o de tipo II.

Funciones no acotadas en intervalos acotados

$$\left\{ \begin{array}{l} F: (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ no acotada} \\ \bullet \int_a^b F(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b F(x) dx \\ \\ F: [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ no acotada} \\ \bullet \int_a^b F(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c F(x) dx \end{array} \right.$$

Ejemplos:



$$g(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2}$$

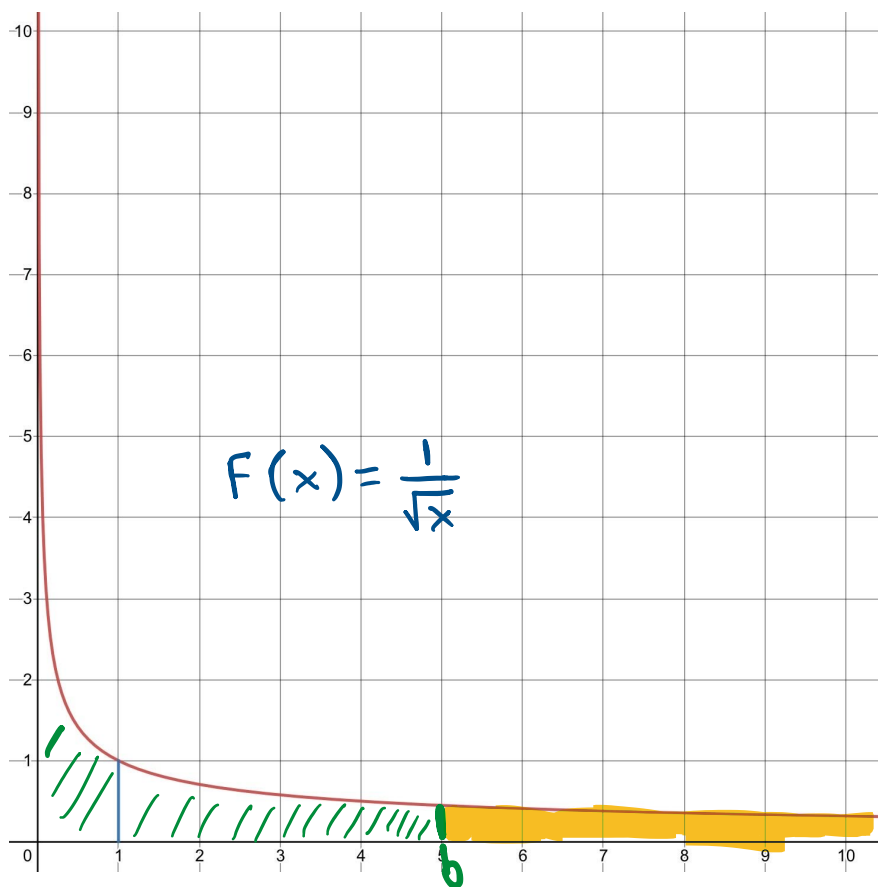
$$\left[\begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \\ g(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} \text{ (primitiva de } F) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} + 1 \right] = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge y $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \Big|_c^1 \right] = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[-1 + \frac{1}{c} \right] = \infty$$

$\therefore$ la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverge.



$$* \text{ ¿ } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2?$$

Sean $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Consideremos $b > 0$.

$$\Rightarrow \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_a^b \right]$$

$\uparrow$
 $x^{-\frac{1}{2}}$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}] = 2\sqrt{b} - 0 = 2\sqrt{b}$$

En particular, si $b=1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_b^c \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[2\sqrt{x} \Big|_b^c \right] \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[2\sqrt{c} - 2\sqrt{b} \right] = \infty\end{aligned}$$

$\therefore$ la integral impropia $\int_b^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge para cualquier $b > 0$.

$$\text{¿ } \int_1^{\infty} F(x) dx \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^{\infty} F(x) dx \text{ diverge?}$$

para $a \geq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 + 5x + 5} dx$$

$$\int e^{x^2} dx$$