

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

• $F(x) = \int_a^x \underline{x^2} g(t) dt$, donde g es una función continua

$(F'(x) \neq x^2 \sin(x))$ $\xrightarrow{\text{variable respecto a la cual se integra}}$ x^2 es constante dentro de la integral

$\Rightarrow F(x) = \underline{x^2} \int_a^x g(t) dt$

Utilizamos la regla del producto $\rightarrow (uv)' = uv' + u'v$ para calcular $F'(x)$

$$F'(x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt + \frac{d}{dx} [x^2] \cdot \int_a^x g(t) dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = x^2 g(x) + 2x \int_a^x g(t) dt$$

• $F(x) = \int_a^x \left(\int_b^{y^3} \frac{2}{1+\cos^2(t)} dt \right) dy \rightarrow \int_a^x 6(y) dy$

$\xrightarrow{\text{se debe integrar con respecto a } y}$

(Podemos verlo como una función de y)

$$\text{Sea } G(y) = \int_b^{y^3} \frac{2}{1+\cos^2(t)} dt \Rightarrow F(x) = \int_a^x G(y) dy$$

Como $\frac{2}{1+\cos^2(t)}$ es continua y y^3 es derivable, entonces G es derivable $\Rightarrow G$ es continua $\Rightarrow F$ es derivable y

$$F'(x) = G(x) = \int_b^{x^3} \frac{2}{1+\cos^2(t)} dt$$

Encuentra una función F y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_a^x F(t) dt = \cos x + 1 \quad (*)$$

Consideremos el caso en el que F es continua $\Rightarrow F(x) = \int_a^x F(t) dt$ es derivable y $F'(x) = F(x)$ (por el 1º TFC).

Derivando ambos miembros de (*) con respecto a x obtenemos que

$$F(x) = -\sin x$$

Sustituyendo en (*):

$$\cos x + 1 = \int_a^x -\sin(t) dt = \cos(t) \Big|_a^x = \cos(x) - \cos(a)$$

$\uparrow$
 primitiva
 de $-\sin(t)$

$$\Rightarrow \cos(x) + 1 = \cos(x) - \cos(a)$$

$$\Rightarrow -1 = \cos(a)$$

Tomando $a = \pi$ se cumple que $\cos(a) = -1$

$$* \int_{\pi}^x -\sin(t) dt = \cos(t) \Big|_{\pi}^x = \cos(x) - \cos(\pi) = \cos(x) + 1$$

Calcula $F(2)$ si F es continua y satisface la ecuación dada para cada $x \geq 0$:

$$a) \int_0^{x^2} F(t) dt = x^2(1+x) = x^2 + x^3$$

Como F es continua y x^2 es derivable, derivando ambos miembros de la igualdad con respecto a x obtenemos que:

$$F(x^2) \cdot (2x) = 2x + 3x^2$$

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow 2F(x^2) = 2 + 3x \Rightarrow F(x^2) = 1 + \frac{3}{2}x$$

Evalutando en $x = \sqrt{2}$:

$$F(2) = F((\sqrt{2})^2) = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

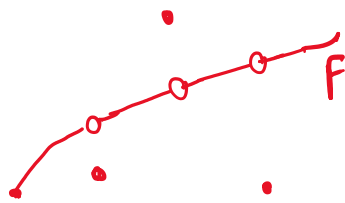
$$* \text{ En general, si } y > 0 \Rightarrow F(y) = F((\sqrt{y})^2) = 1 + \frac{3\sqrt{y}}{2}$$

¿Cuál es el valor de $F(0)$?

Como F es continua, entonces

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{3\sqrt{x}}{2} \right] = 1 + \frac{3\sqrt{0}}{2} = 1$$

$$\therefore F(x) = 1 + \frac{3\sqrt{x}}{2} \text{ para toda } x \geq 0$$



* Si F no fuera continua, no podríamos determinar la regla de correspondencia en todo punto.

Si g es continua en $[a, b]$ y cambiamos el valor de $g(x)$ es una cantidad finita de puntos, la nueva función es integrable y su integral coincide con la de F .

$$b) \int_0^{F(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$$

Como la ecuación se cumple para toda $x \geq 0$, sustituyendo $x=2$:

$$\int_0^{F(2)} t^2 dt = 2^2(1+2) = 12$$

$$\Rightarrow 12 = \int_0^{F(2)} t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^{F(2)} = \frac{[F(2)]^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{[F(2)]^3}{3} \Rightarrow F(2) = \sqrt[3]{36}$$

↑
2º TFC.

¿Se puede encontrar una regla de correspondencia para $F(x)$ ($x \geq 0$)?

$$\underline{x^2(1+x)} = \int_0^{F(x)} t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^{F(x)} = \underline{\frac{[F(x)]^3}{3} - \frac{0}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \sqrt[3]{3x^2(1+x)}} \quad \text{para toda } x \in [0, \infty)$$

1º TFC Si F es integrable en $[a, b]$ y F es continua en $c \in [a, b]$, entonces $F(x) := \int_a^x F(t) dt$ es derivable en c y

$$F'(c) = F(c).$$

2º TFC. Si F es integrable en $[a, b]$ y existe una función g en $[a, b]$ t.q. $g' = F$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b F(t) dt = g(b) - g(a)$$

$$\int_a^b x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

$$c) \int_0^{x^2(1+x)} F(t) dt = x$$

Como F es continua y $x^2(1+x)$ es derivable, derivando ambos lados de la ecuación obtenemos que

$$F(x^2(1+x)) \cdot [2x + 3x^2] = 1 \quad \text{para toda } x \geq 0$$

$$\hookrightarrow x^2(1+x) = 2$$

Evalando en $x = 1$:

$$F(2) \cdot [5] = 1 \Rightarrow F(2) = \frac{1}{5}$$

Demuestra que si $x > 0$, entonces

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

Sean $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ y $G(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$ para toda $x > 0$.

Como $\frac{1}{1+t^2}$ es continua en $\mathbb{R}$ y tanto x como $\frac{1}{x}$ es derivable para toda $x > 0$, entonces F y G son derivables en $(0, \infty)$ y además

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad y$$

$$G'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow F'(x) = G'(x) \quad \text{para toda } x \in (0, \infty)$$

$\Rightarrow$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + c$ para toda $x \in (0, \infty)$

Evaluando en $x=1$ tenemos que $F(1) = G(1) + c$

$$\Rightarrow \int_1^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_1^1 \frac{1}{1+t^2} dt + c$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

$\therefore F(x) = G(x)$ para toda $x \in (0, \infty)$.