

La clase pasada demostramos lo siguiente:

- Si:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

para cada  $x \in [a, b]$

o

$$F(x) = \int_b^x f(t) dt$$

para cada  $x \in [a, b]$ ,

entonces

$$F'(x) = f(x) \text{ para cada } x \in [a, b].$$

- Si:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como

$$G(x) = \int_x^a f(t) dt$$

para cada  $x \in [a, b]$

o

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt$$

para cada  $x \in [a, b]$ ,

entonces

$$G'(x) = -f(x) \text{ para cada } x \in [a, b].$$

### Teorema.

- (1) Si,  $f$  es continua en  $[a, b]$ ,  $\alpha: [c, d] \rightarrow [a, b]$  es derivable y  $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como

$$F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t) dt$$

para cada  $x \in [c, d]$

o

$$F(x) = \int_b^{\alpha(x)} f(t) dt$$

para cada  $x \in [c, d]$

entonces  $F$  es derivable en  $[c, d]$  y

$$F'(x) = f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) \text{ para toda } x \in [c, d].$$

(2) Si  $F$  es continua en  $[a, b]$ ,  $\beta: [c, d] \rightarrow [a, b]$  es derivable y  $G: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como

$$G(x) = \int_{\beta(x)}^a F(t) dt \quad \text{o} \quad G(x) = \int_{\beta(x)}^b F(t) dt$$

para cada  $x \in [c, d]$       para cada  $x \in [c, d]$

entonces  $G$  es derivable en  $[c, d]$  y

$$G'(x) = -F(\beta(x)) \cdot \beta'(x).$$

(3) Si  $F$  es continua en  $[a, b]$ ,  $\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow [a, b]$  son derivables y  $H: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como

$$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(t) dt \quad \text{para cada } x \in [c, d],$$

entonces  $H$  es derivable en  $[c, d]$  y

$$H'(x) = F(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - F(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

Demostración.

(1) Sea  $H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $H(x) = \int_a^x F(t) dt$ .

Como  $F$  es continua, entonces  $H$  es derivable y

$$H'(x) = F(x).$$

Notemos que

$$F = H \circ \alpha. \quad (\text{porque } (H \circ \alpha)(x) = H(\alpha(x)) = \int_a^{\alpha(x)} F(t) dt = F(x))$$

Como  $\alpha: [c, d] \rightarrow [a, b]$  es derivable y  $H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable,

por la regla de la cadena tenemos que  $F = H \circ \alpha$  es derivable y

$$\begin{aligned} F'(x) &= H'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) \\ &= F(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x). \end{aligned}$$

Para el caso cuando  $F(x) = \int_b^{\alpha(x)} f(t) dt$  es la misma demostración cambiando  $a$  por  $b$  en los pasos señalados.

### \* Regla de la cadena:

Sean  $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in A$ .

Si  $F$  es derivable en  $a$  y  $g$  es derivable en  $F(a)$ , entonces  $g \circ F$  es derivable en  $a$  y

$$(g \circ F)'(a) = g'(F(a)) \cdot F'(a).$$

(2) y (3) "Ejercicio."

$$(3) H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt = \int_{\alpha(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\beta(x)} f(t) dt \dots$$

$$\frac{d}{dx} \int_c^{\alpha(x)} f(t) dt = f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^c f(t) dt = -f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$i) F(x) = \int_a^{x^2} \cos(3t) dt$$

$$F'(x) = \cos(3x^2) \cdot (2x) \quad (\text{no es necesario simplificar})$$

$$ii) F(x) = \int_{x^3}^b \sin(1+t) dt$$

$$F'(x) = -\sin(1+x^3) \cdot (3x^2)$$

$$iii) F(x) = \int_b^{x^4} \sin^2(t) dt$$

$$F'(x) = \sin^2(x^4) \cdot (4x^3)$$

$$iv) F(x) = \int_b^{\sin^2(x)} \cos(t) dt$$

$$F'(x) = \cos(\sin^2(x)) \cdot \frac{d}{dx} [\sin^2(x)]$$

$$= \cos(\sin^2(x)) \cdot (2 \sin(x) \cdot \cos(x))$$

$$* \frac{d}{dx} [\sin^2 x] = \frac{d}{dx} [(\sin x)^2] = 2(\sin x) \cdot (\cos x)$$

$$v) \quad F(x) = \int_{\cos^3(x)}^a t^2 dt$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= -(\cos^3(x))^2 \cdot \frac{d}{dx} [\cos^3(x)] \\ &= -\cos^6(x) \cdot (3\cos^2(x))(-\sin(x)) \\ &= 3\sin(x) \cdot \cos^8(x) \end{aligned}$$

$$vi) \quad F(x) = \int_a^{\sin^2(x)} \sin^2(t) dt$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin^2(\sin^2(x)) \cdot \frac{d}{dx} [\sin^2(x)] \\ &= \sin^2(\sin^2(x)) (2\sin(x) \cdot \cos(x)) \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_a^x F(t) dt$$

$$vii) \quad F(x) = \left( \int_a^x \frac{1}{1+t^2} dt \right)^5$$

$$\Rightarrow F'(x) = F(x)$$

$F$  continua

$$\begin{aligned} F'(x) &= 5 \left( \int_a^x \frac{1}{1+t^2} dt \right)^4 \cdot \frac{d}{dx} \left( \int_a^x \frac{1}{1+t^2} dt \right) \\ &= 5 \left( \int_a^x \frac{1}{1+t^2} dt \right)^4 \cdot \left( \frac{1}{1+x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{viii)} \quad F(x) = \sin \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt \right)$$

$$F'(x) = \cos \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt \right) \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{1 + \sin^2 x} \right)}_{\frac{d}{dx} \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt \right)}$$

$$\text{ix)} \quad F(x) = \int_a^{\left( \int_a^x \frac{1}{1 + \sin t} dt \right) \leftarrow \alpha(x)} \cos t \, dt = \int_a^{\alpha(x)} \cos t \, dt$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \sin t} dt \right) \cdot \frac{d}{dx} \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \sin t} dt \right) \\ &= \cos \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \sin t} dt \right) \cdot \left( \frac{1}{1 + \sin x} \right) \end{aligned}$$

Otra forma de escribirlo:

$$F(x) = \int_a^{\left( \int_a^x \frac{1}{1 + \sin t} dt \right)} \cos t \, dt$$

$$\text{Sea } \alpha(x) = \int_a^x \frac{1}{1 + \sin t} dt \Rightarrow F(x) = \int_a^{\alpha(x)} \cos t \, dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = \cos(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

$$= \cos\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin t} dt\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\sin x}\right)$$

$$x) \quad F(x) = \int_a^{\left(\int_a^{x^2} \cos(t) dt\right)} \frac{1}{1+\cos^2(t)} dt \quad \leftarrow \alpha(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+\cos^2\left(\int_a^{x^2} \cos(t) dt\right)} \cdot \underbrace{\cos(x^2) \cdot (2x)}_{\frac{d}{dx} \int_a^{x^2} \cos(t) dt}$$

Otra Forma: sea  $\alpha(x) = \int_a^{x^2} \cos(t) dt$

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^{\alpha(x)} \frac{1}{1+\cos^2(t)} dt \quad y \quad \alpha'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+\cos^2(\alpha(x))} \cdot \alpha'(x)$$

$$= \frac{1}{1+\cos^2\left(\int_a^{x^2} \cos(t) dt\right)} \cdot \cos(x^2) \cdot (2x)$$

$$xi) F(x) = \int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \quad \left( \int_a^{\beta(x)} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \right) \leftarrow \beta(x)$$

$$\left( \int_a^{\alpha(x)} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \right) \leftarrow \alpha(x)$$

Sean  $\beta(x) = \int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$  y  $\alpha(x) = \int_a^{\beta(x)} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^{\alpha(x)} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+\sin^2(\alpha(x))} \cdot \alpha'(x)$$

$$= \frac{1}{1+\sin^2(\alpha(x))} \cdot \frac{1}{1+\sin^2(\beta(x))} \cdot \beta'(x)$$

$$= \frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^{\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t} dt} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t} dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x}$$

$$F(x) = \int_a^{\left( \int_a^{\left( \int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \right)} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt \right)} \frac{1}{1+\sin^2 t} dt$$

$$G(x) = \text{sen}(\cos(\tan x))$$

$$G'(x) = \cos(\cos(\tan x)) \cdot (-\text{sen}(\tan x)) \cdot \sec^2(x)$$

Otra forma:

$$F'(x) = \frac{1}{1 + \text{sen}^2 \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t} dt \right)} \cdot \frac{d}{dx} \left[ \int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{1 + \text{sen}^2 \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t} dt \right)} \cdot \frac{1}{1 + \text{sen}^2 \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t} dt \right)} \cdot \frac{d}{dx} \left[ \int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{1 + \text{sen}^2 \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t} dt \right)} \cdot \frac{1}{1 + \text{sen}^2 \left( \int_a^x \frac{1}{1 + \text{sen}^2 t} dt \right)} \cdot \frac{1}{1 + \text{sen}^2 x}$$

- Demuestra que si  $c > 0$ ,  $a < b$  y  $F$  es continua en  $[ca, cb]$ , entonces

$$\int_{ca}^{cb} F(x) dx = c \int_a^b F(cx) dx$$

Demostración.

Notemos que si  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como  $g(x) = F(cx)$ , entonces  $g$  es continua por ser composición de funciones continuas.

Definimos  $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$F(x) = \int_{ca}^{cx} F(t) dt \quad \text{y} \quad G(x) = c \int_a^x F(ct) dt$$

(basta probar que  $F(b) = G(b)$ ).

Por el T.F.C., como  $F(t)$  y  $F(ct)$  son continuas

$$\Rightarrow F'(x) = F(cx) \cdot c \quad \text{y} \quad G'(x) = c \cdot F(cx)$$

$\uparrow$   
 $\frac{d}{dx} cx$

$$\Rightarrow F'(x) = G'(x)$$

$\Rightarrow$  existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $F = G + d$  en  $[a, b]$ .

$$(F(x) = G(x) + d \text{ para toda } x \in [a, b]).$$

$$F(a) = G(a) + d$$

En particular

$$F(a) = G(a) + d \Rightarrow \int_{ca}^{ca} F(t) dt = c \int_a^a F(ct) dt + d$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + d$$

$$\Rightarrow d = 0 \Rightarrow F(x) = G(x) \text{ para todo } x \in [a, b]$$

Evalutando en  $x = b$  obtenemos que

$$\int_{ca}^{cb} F(t) dt = F(b) = G(b) = c \int_a^b F(ct) dt$$