

El primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable en $[a, b]$ y definamos $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y

$$F'(c) = f(c)$$

(Si $c=a$ o $c=b$, entonces $F'(c)$ representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F en c).

Corolario. Si f es continua en $[a, b]$ y definimos $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f,$$

entonces F es derivable en $[a, b]$ y

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para toda } x \in [a, b].$$

* Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \text{para toda } x \in [a, b].$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t^2 dt = x^2$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x y^2 dy = x^2$$

$$\int f(t) dt = \int f(y) dy = \int f(x) dx$$

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} = \int_0^b t^2 dt$$

$$\int_0^b \underbrace{x}_{\substack{\uparrow \\ \text{constante (no depende de } x)}} y dx = y \int_0^b x dx = y \cdot \frac{b^2}{2}$$

$$\int_0^b x \underbrace{y dy}_{\substack{\uparrow \\ \text{constante (no depende de } y)}} = x \int_0^b y dy = x \cdot \frac{b^2}{2}$$

Corolario. Si F es continua en $[a, b]$ y existe $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' = F$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b F(x) dx = g(b) - g(a).$$

Demostración.

Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \int_a^x F(t) dt$.

Por el primer T.F.C., como F es continua, sabemos que

$$\underline{F'(x) = F(x) = g'(x)} \text{ para todo } x \in [a, b]$$

$\Rightarrow$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F = g + c$ ($F(x) = g(x) + c$ para toda $x \in [a, b]$).

$$\text{Como } F(a) = \int_a^a F(t) dt = 0$$

$$\Rightarrow 0 = F(a) = g(a) + c \Rightarrow c = -g(a)$$

$$\Rightarrow F(x) = g(x) - g(a) \text{ para toda } x \in [a, b].$$

En particular,

$$\int_a^b F(t) dt = F(b) = g(b) - g(a).$$

* Si $F' = g'$ en un intervalo I , entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F = g + c$ en I .

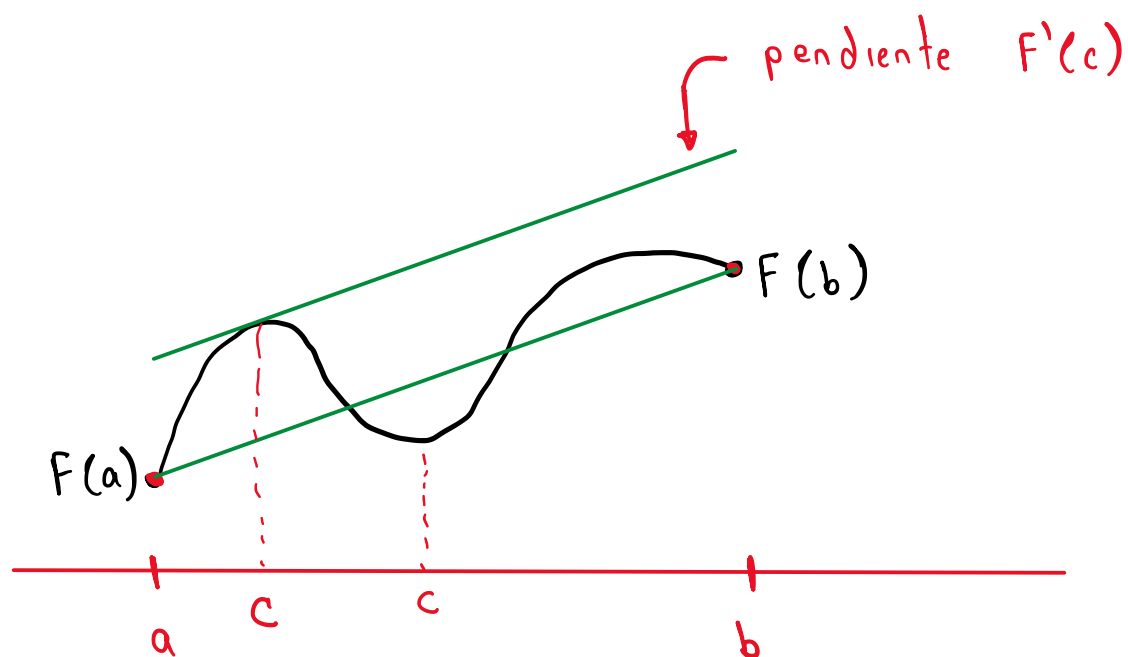
Teorema del valor medio (T.V.M.)

Si F es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a};$$

equivalentemente,

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a).$$



El segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Si f es integrable en $[a, b]$ y existe $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' = f$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a).$$

$$\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$$

Demostración.

Probaremos que

$$(*) \quad L(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f, P) \quad \text{para toda } P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$$

Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, como g es derivable en $[t_{i-1}, t_i]$ ($g' = f$), por el T.V.M. existe $x_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$\begin{aligned} g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \underline{f(x_i)}(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Como $m_i \leq f(x_i) \leq M_i$

$$\Rightarrow m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow L(f, P) \leq \sum_{i=1}^n \underline{g(t_i) - g(t_{i-1})} \leq U(f, P)$$

$$\Rightarrow L(f, P) \leq \underline{g(b) - g(a)} \leq U(f, P)$$

Dado que $\int_a^b F$ es el único número que cumple que $L(F, P) \leq \int_a^b F \leq U(F, P)$ para toda $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, concluimos que

$$\int_a^b F(t) dt = g(b) - g(a).$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g(t_1) - g(t_0) + g(t_2) - g(t_1) + g(t_3) - g(t_2) + \dots + g(t_n) - g(t_{n-1}) \\ &= g(t_n) - g(t_0) = g(b) - g(a). \end{aligned}$$

Definición. Decimos que g es una primitiva de F en un intervalo I si $g' = F$ en I .
(antiderivada)

Ejemplos:

Sea $F(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{Q}$, $n \neq -1$

Como $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva de $F(x)$ en $\mathbb{R}$,

entonces

$$\int_a^b x^n dx = g(b) - g(a) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Notación:

$$g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = g(x) \Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x^2 + 5x - 1 dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x \right] \Big|_{-1}^2 \\ &= \left[\frac{2^3}{3} + \frac{5(2)^2}{2} - 2 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{5(-1)^2}{2} - (-1) \right] = \boxed{\frac{15}{2}} \end{aligned}$$

$g(x)$
es primitiva
de $F(x) = x^2 + 5x - 1$

El primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable en $[a, b]$ y definamos $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y

$$F'(c) = f(c)$$

(Si $c = a$ o $c = b$, entonces $F'(c)$ representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F en c).

Corolario

(1) Si f es continua en $[a, b]$ y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

entonces F es derivable en $[a, b]$ y

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para toda } x \in [a, b].$$

(2) Si f es continua en $[a, b]$ y $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt,$$

entonces G es derivable en $[a, b]$ y

$$G'(x) = -f(x) \quad \text{para toda } x \in [a, b].$$

Demostración

(2) Como $\int_a^b F(t) dt = \int_a^x F(t) dt + \int_x^b F(t) dt$

$$\Rightarrow G(x) = \int_x^b F(t) dt = \underbrace{\int_a^b F(t) dt}_{\substack{\text{constante} \\ \text{(número real} \\ \text{que no depende de } x)}} - \underbrace{\int_a^x F(t) dt}_{\text{depende de } x}$$

Usando (1) tenemos que

$$G'(x) = \underline{0} - F(x) \Rightarrow G'(x) = -F(x).$$

* Por ahora, debido a (1) y (2), si $a \leq x \leq b$,

$$F(x) = \int_a^x F(t) dt \quad \text{y} \quad G(x) = \int_x^b F(t) dt$$

$$\Rightarrow F'(x) = F(x) \quad \text{y} \quad G'(x) = -F(x)$$

$$\text{Si } \underline{H(x) = \int_x^a F(t) dt} \Rightarrow H(x) = - \int_a^x F(t) dt$$

$$\Rightarrow \underline{H'(x) = -F(x)}_{(1)}$$

$$\text{Si } \underline{H(x) = \int_b^x F(t) dt} \Rightarrow H(x) = - \int_x^b F(t) dt$$

$$\Rightarrow \underline{H'(x) = -(-F(x)) = F(x)}_{(2)}$$

Concluimos que si $F(x) = \int_c^x F(t) dt$ y $G(x) = \int_x^c F(t) dt$,

$$\text{entonces } F'(x) = F(x) \quad \text{y} \quad G'(x) = -F(x)$$

siempre que F sea continua en el intervalo $[c, x]$ (si $c < x$) o $[x, c]$ (si $x < c$).

sin importar si $x \leq c$ o $c \leq x$.