

$$\text{son equivalentes} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c) \\ \lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) = F(c) \\ \lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) - F(c) = 0 \end{array} \right.$$

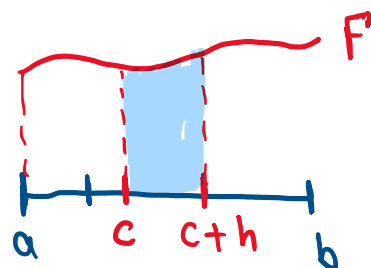
Teorema Si F es integrable en $[a, b]$ y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$F(x) = \int_a^x F,$$

entonces F es continua en $[a, b]$.

Demostración.

Sea $c \in [a, b]$. Demostraremos que $\lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) - F(c) = 0$



Notemos que para cada h :

$$\int_a^{c+h} F = \int_a^c F + \int_c^{c+h} F$$

$$\Rightarrow F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} F - \int_a^c F = \int_c^{c+h} F$$

Como F es integrable en $[a, b]$, entonces F está acotada en $[a, b]$, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b] \quad |F(x)| \leq M$$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad -M \leq F(x) \leq M$$

- Caso 1: Si $h \geq 0$, entonces

$$\underline{-M \cdot |h|} = -M \cdot h = \int_c^{c+h} -M \leq \int_c^{c+h} F \leq \int_c^{c+h} M = M \cdot h = \underline{M \cdot |h|}$$

$$\Rightarrow -M \cdot |h| \leq \underline{F(c+h) - F(c)} \leq M \cdot |h| \text{ cuando } h \geq 0$$

$$\boxed{\int_a^b m = m(b-a)}$$

- Caso 2: Si $h < 0$, entonces

$$\underline{-M \cdot |h|} = -M \cdot (-h) = \int_{c+h}^c -M \leq \int_{c+h}^c F \leq \int_{c+h}^c M = M \cdot (-h) = \underline{M \cdot |h|}$$

$\uparrow$
 $c - (c+h)$

$$\Rightarrow \underline{-M \cdot |h|} \leq - \int_c^{c+h} F \leq M \cdot |h|$$

$$\stackrel{(-1)}{\Rightarrow} M \cdot |h| \geq \int_c^{c+h} F \geq -M \cdot |h|$$

$$\boxed{\int_b^a F = - \int_a^b F}$$

$$\Rightarrow -M|h| \leq \underline{F(c+h) - F(c)} \leq M \cdot |h| \text{ cuando } h < 0$$

Por lo tanto,

$$\boxed{-M \cdot |h| \leq F(c+h) - F(c) \leq M \cdot |h|} \text{ para toda } h \in \mathbb{R} \text{ tal que } c+h \in [a, b].$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} -M \cdot |h| = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} M \cdot |h|$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) - F(c) = 0$$

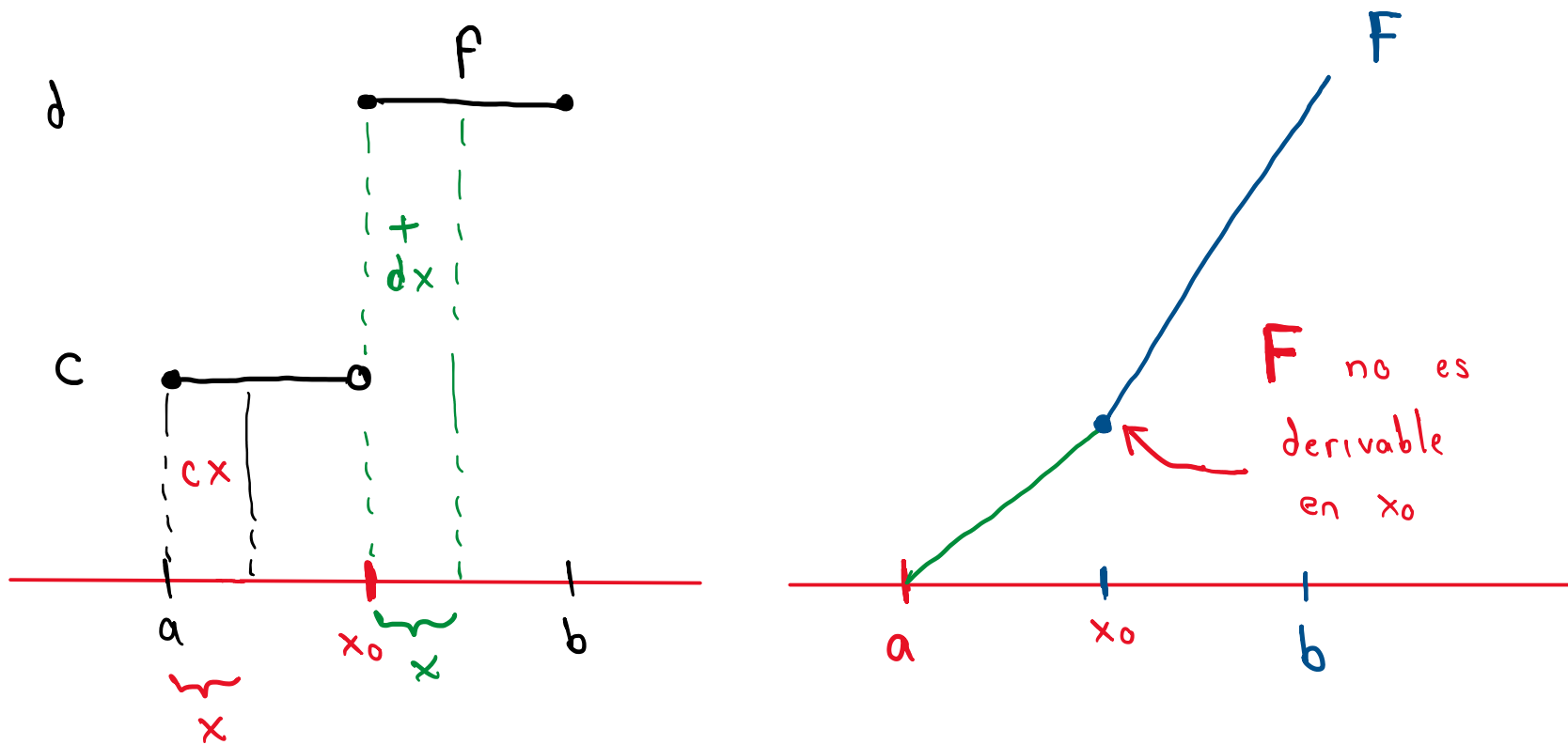
* Si $c=a$ o $c=b$, únicamente se considera el límite por la derecha o por la izquierda, respectivamente.

$\therefore F$ es continua en c . (para toda $c \in [a, b]$).

* Def. Una función F es continua en $[a, b]$ si

- F es continua por la derecha en a
- F es continua por la izquierda en b
- F es continua en x para toda $x \in (a, b)$.

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} [F(x) - L] = 0$$



Lema Sean $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in [a, b]$.

Definimos

$$M_h = \sup \{ f(x) \mid x \in [c, c+h] \} \quad \text{si } h > 0 \text{ y } [c, c+h] \subseteq [a, b]$$
$$m_h = \inf \{ f(x) \mid x \in [c, c+h] \}$$

$$M_h = \sup \{ f(x) \mid x \in [c+h, c] \} \quad \text{si } h < 0 \text{ y } [c+h, c] \subseteq [a, b].$$
$$m_h = \inf \{ f(x) \mid x \in [c+h, c] \}$$

Si f es continua en c , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} M_h = f(c) = \lim_{h \rightarrow 0} m_h$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists \delta > 0$ $\forall h \in \mathbb{R} \left(|h| < \delta \Rightarrow |M_h - f(c)| < \varepsilon \right)$
 $\left(|h| < \delta \Rightarrow |m_h - f(c)| < \varepsilon \right)$

Como f es continua en c y $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b] \left(|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) (*)$$

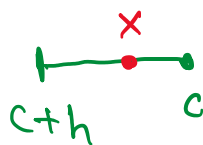
Sea h tal que $|h| < \delta$ (P.D. $|M_h - f(c)| < \varepsilon$ y $|m_h - f(c)| < \varepsilon$)

• Caso 1: Si $h > 0$.

Notemos que si $x \in [c, c+h] \Rightarrow |x - c| = \underline{x - c} \leq \underline{c+h} - c = h = |h| < \delta$

(* si $h < 0$, notamos que si $x \in [c+h, c] \Rightarrow |x - c| \leq |h| < \delta$)

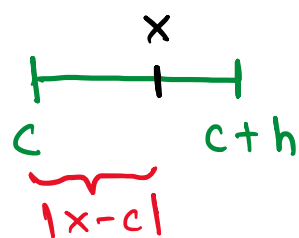
$$\Rightarrow |x - c| < \delta$$



$$\Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(*)

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - f(c) < \frac{\varepsilon}{2}$$

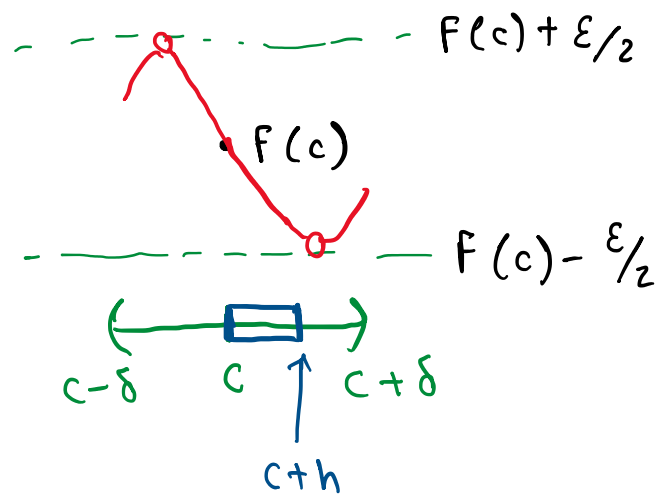
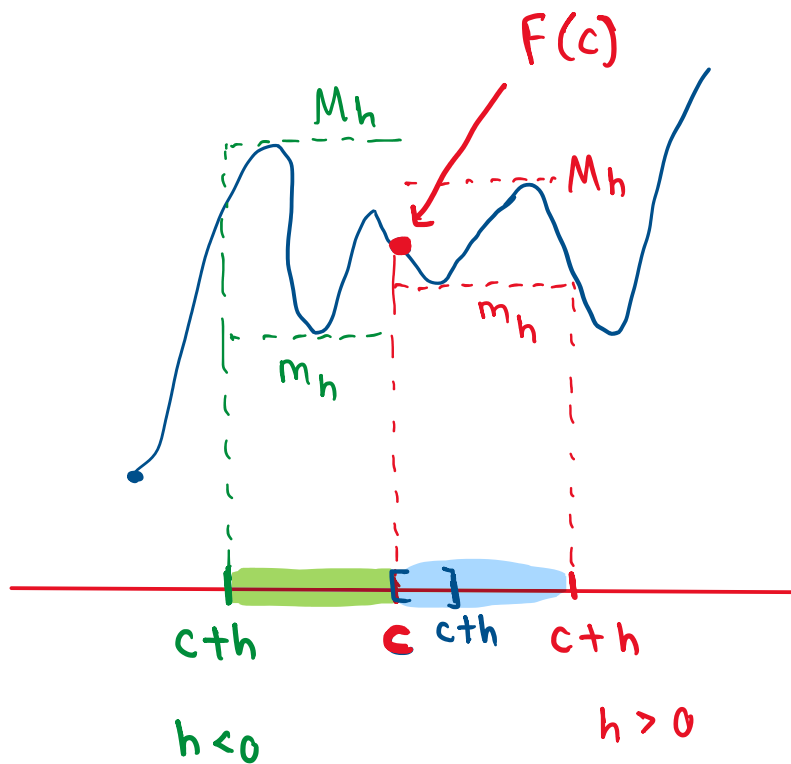


$$\Rightarrow \underbrace{F(c) - \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{cota inferior}} < F(x) < \underbrace{F(c) + \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{cota superior}} \quad \text{para toda } x \in [c, c+h]$$

$$\Rightarrow F(c) - \varepsilon < F(c) - \frac{\varepsilon}{2} \leq m_h \leq M_h \leq F(c) + \frac{\varepsilon}{2} < F(c) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} F(c) - \varepsilon < m_h < F(c) + \varepsilon \\ F(c) - \varepsilon < M_h < F(c) + \varepsilon \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -\varepsilon < m_h - F(c) < \varepsilon \\ -\varepsilon < M_h - F(c) < \varepsilon \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} |m_h - F(c)| < \varepsilon \\ |M_h - F(c)| < \varepsilon \end{array}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} m_h = F(c) = \lim_{h \rightarrow 0} M_h$$



El primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea F una función integrable en $[a, b]$ y definamos $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si F es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y

$$F'(c) = f(c)$$

(Si $c=a$ o $c=b$, entonces $F'(c)$ representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F en c).

Demostración.

Supongamos primero que $c \in (a, b)$.

Recordemos que

$$F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_c^{c+h} f}{h}$$

(Queremos probar que este límite existe y es igual a $f(c)$)

Sea h tal que $c+h \in [a, b]$

• Caso 1: Si $h > 0$, definimos

$$M_h = \sup \{ f(x) \mid x \in [c, c+h] \}$$

$$m_h = \inf \{ f(x) \mid x \in [c, c+h] \}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [c, c+h] \quad m_h \leq f(x) \leq M_h$$

$$\Rightarrow \underline{m_h \cdot h} = \int_c^{c+h} m_h \leq \int_c^{c+h} f \leq \int_c^{c+h} M_h = \underline{M_h \cdot h}$$

$$\Rightarrow m_h \leq \frac{\int_c^{c+h} f}{h} \leq M_h$$

• Caso 2: Si $h < 0$, definimos

$$M_h = \sup \{ F(x) \mid x \in [c+h, c] \}$$

$$m_h = \inf \{ F(x) \mid x \in [c+h, c] \}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [c+h, c] \quad m_h \leq F(x) \leq M_h$$

$$\Rightarrow \underline{m_h \cdot (-h)} = \int_{c+h}^c m_h \leq \int_{c+h}^c F \leq \int_{c+h}^c M_h = \underline{M_h \cdot (-h)}$$

$$\Rightarrow -m_h \cdot h \leq -\int_c^{c+h} F \leq -M_h \cdot h$$

$$\Rightarrow m_h \cdot h \geq \int_c^{c+h} F \geq M_h \cdot h$$

$$\Rightarrow_{h < 0} \boxed{m_h \leq \frac{\int_c^{c+h} F}{h} \leq M_h}$$

Luego, $m_h \leq \frac{\int_c^{c+h} F}{h} \leq M_h$ para toda $h \neq 0$ tal que $c+h \in [a, b]$

Como F es continua en c , por el lema anterior sabemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} m_h = F(c) = \lim_{h \rightarrow 0} M_h \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_c^{c+h} F}{h} = F(c)$$

$$\therefore F'(c) = F(c).$$

* Si $c = a$, únicamente se considera $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \quad (h > 0)$

* Si $c = b$, únicamente se considera $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \quad (h < 0)$

Corolario. Si F es continua en $[a, b]$ y definimos $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f,$$

entonces F es derivable en $[a, b]$ y

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para toda } x \in [a, b].$$

Ejemplos

$$\text{Si } G(x) = \int_0^x \underbrace{\sin(t^2+1)}_{\text{continua}} dt \Rightarrow G'(x) = \sin(x^2+1)$$

$$F(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt \Rightarrow \text{¿ } F'(x) = f(x^2)? \quad \underline{\text{No}}$$