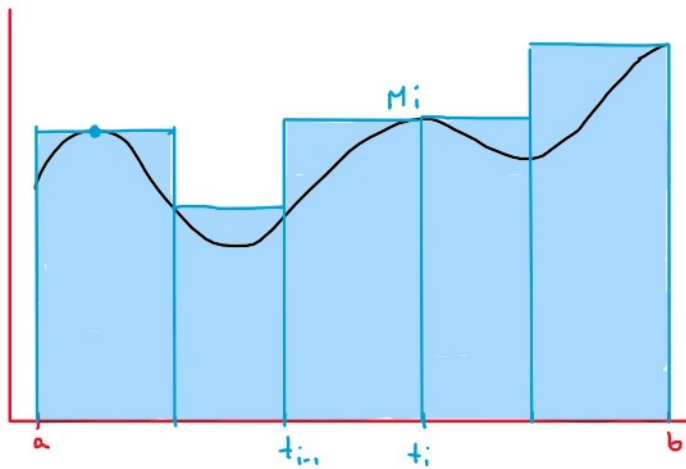
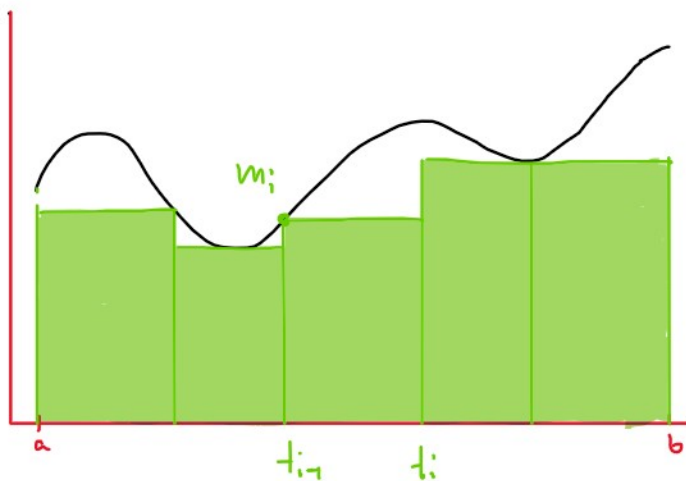


Sumas de Riemann y conjuntos densos

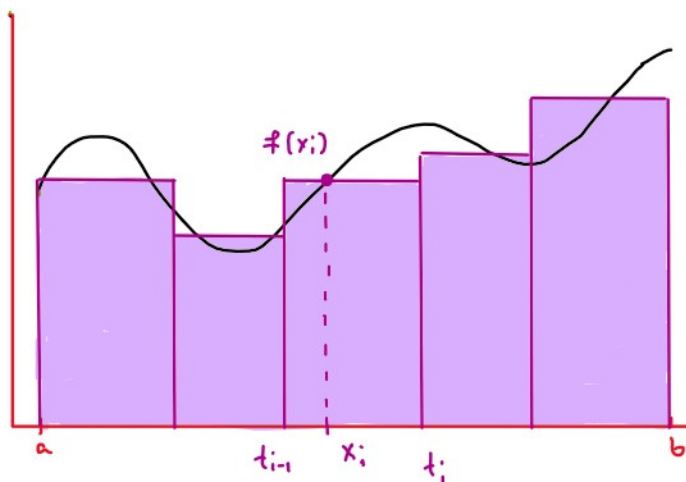
martes, 15 de marzo de 2022



$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1})$$



$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1})$$



$$\sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1})$$

$$x_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

Definición. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$.

Llamamos suma de Riemann de f para P al número

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1}),$$

con $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ p. c. $i \in \{1, \dots, n\}$

• Dado que $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ pasa que

$$m_i \leq f(x_i) \leq M_i \quad \text{p. c. } i \in \{1, \dots, n\}$$

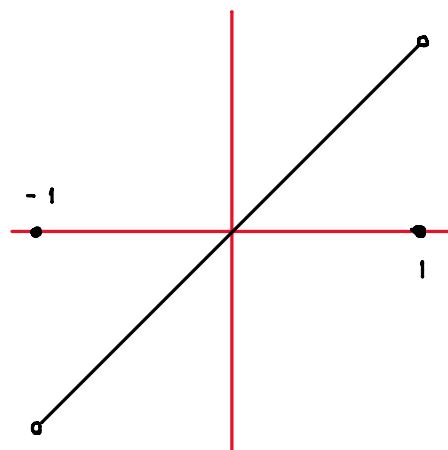
$$\Rightarrow L(f, P) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1}) \leq U(f, P)$$

para cada suma de Riemann?

¿ suma inferior $\Rightarrow$ suma de Riemann ?
 suma superior $\Rightarrow$

Ejemplo. Sea $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$



Sea $P = \{-1, 1\} \in \mathcal{P}_{[-1, 1]}$ y $y \in [-1, 1]$

$$\Rightarrow L(f, P) = m(1 - (-1)) = (-1) \cdot 2 = -2,$$

$$U(f, P) = M(1 - (-1)) = 1 \cdot 2 = 2 \quad y$$

$$S(f, P) = f(y) \cdot (1 - (-1)) = 2y \quad \leftarrow \text{suma de Riemann}$$

$$\Rightarrow L(f, P) < 2y < U(f, P) \quad \text{p. c. } y \in [-1, 1]$$

$\therefore L(f, P)$ y $U(f, P)$ no son sumas de Riemann de f para P .

Teorema. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ cumple que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en $[a, b]$, también es uniformemente continua en $[a, b]$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que si

$$x, y \in [a, b] \text{ y } |x - y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Consideremos $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ p. c. $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\text{Si } x, y \in [t_{i-1}, t_i] \Rightarrow |x - y| \leq t_i - t_{i-1} < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ p. c. } x, y \in [t_{i-1}, t_i]$$

Lema visto en
clase

$$\Rightarrow M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon \quad (1)$$

Sabemos que para cualquier suma de Riemann de f para P pasa que

$$L(f, P) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) (t_i - t_{i-1}) \leq U(f, P) \quad (2)$$

Además sabemos que f es integrable en $[a, b]$, por lo que

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P)$$

$$\Rightarrow -U(f, P) \leq -\int_a^b f(x) dx \leq -L(f, P) \quad (3)$$

Sumando (2) y (3), se sigue que

$$L(f, P) - U(f, P) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P) - L(f, P)$$

$$\Rightarrow -[U(f, P) - L(f, P)] \leq \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \leq U(f, P) - L(f, P)$$

con $U(f, P) - L(f, P) \geq 0$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq U(f, P) - L(f, P) \stackrel{(*)}{<} \varepsilon$$

Conjuntos densos

$$p \in \mathbb{Q} \quad r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$



Definición. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es denso (en $\mathbb{R}$) si cualquier intervalo abierto contiene un punto de A , es decir, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ se cumple que $(a, b) \cap A \neq \emptyset$.

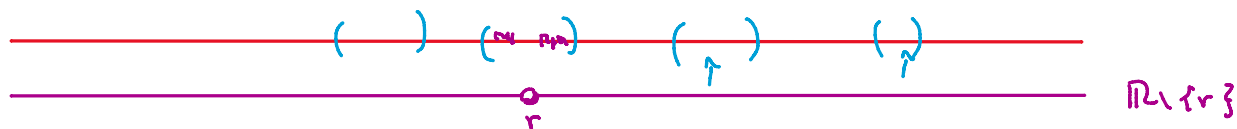
Si $A \subset [a, b]$, diremos que A es denso en $[a, b]$ si todo intervalo abierto contenido en $[a, b]$ contiene un punto de A .



Ejemplos.

~ $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son conjuntos densos.

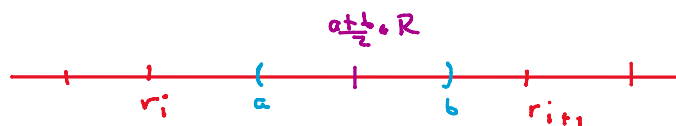
~ Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ es denso



~ Si $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$, entonces $R = \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_n\}$ es denso

Sea $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

• Si $\{r_1, \dots, r_n\} \cap (a, b) = \emptyset$, entonces $\frac{a+b}{2} \in (a, b) \cap R \neq \emptyset$



• Si $\{r_1, \dots, r_n\} \cap (a, b) \neq \emptyset$, sabemos que este conjunto es finito

Sea $M = \max \{r_i \mid r_i \in (a, b)\}$

$\Rightarrow a < M < b$ y no existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $M < r_i < b$

$\Rightarrow \frac{M+b}{2} \in (a, b) \cap R \neq \emptyset$

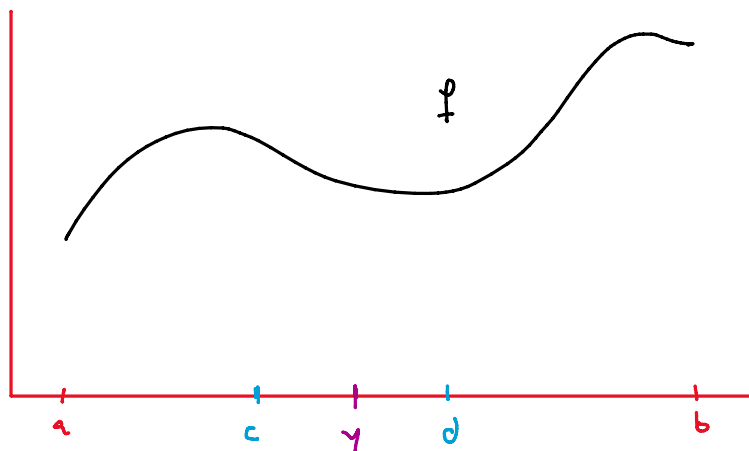
$\therefore \mathbb{R}$ es denso



~ Los conjuntos $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ y $[a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ son densos en $[a, b]$.

Ejercicio 12 (d) Falso o verdadero con argumento:

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces el conjunto de puntos de $[a, b]$ donde f es continua es denso en $[a, b]$.



Sol. Verdadero

Sea $C = \{x \in [a, b] \mid f \text{ es continua en } x\}$ y sea $(c, d) \subset [a, b]$.

$$\text{P.D. } (c, d) \cap C \neq \emptyset$$

$$\text{Como } (c, d) \subset [a, b] \Rightarrow a \leq c < d \leq b$$

Ya que f es integrable $[a, b]$, se sigue por un ejercicio de la guía que f es integrable sobre $[c, d]$

$\Rightarrow$ existe un punto $y \in (c, d)$ tal que f es continua en y

(esto es por un teorema visto en clase)

$$\Rightarrow y \in (c, d) \cap C \neq \emptyset$$

$\therefore C$ es denso en $[a, b]$.