

Lema. (\*) Sea  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada,  $\varepsilon > 0$ ,  $K > 0$ ,  
 $M = \sup \{ F(x) \mid x \in [a, b] \}$  y  $m = \inf \{ F(x) \mid x \in [a, b] \}$

i) Si  $\forall x, y \in [a, b] \quad |F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$ , entonces  $M - m \leq \varepsilon$

ii)  $\forall x, y \in [a, b] \quad |F(x) - F(y)| \leq M - m$ .

En particular,

si  $M - m < \varepsilon$ , entonces  $\forall x, y \in [a, b] \quad |F(x) - F(y)| < \varepsilon$

iii) Si  $\forall x \in [a, b] \quad |F(x)| \leq K$ , entonces  $M - m \leq 2K$ .

Demostración de ii)

Sean  $x, y \in [a, b]$ .

$$\Rightarrow m \leq F(x) \leq M \quad \text{y} \quad m \leq F(y) \leq M$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} m \leq F(x) \leq M \\ -M \leq -F(y) \leq -m \end{array} \Rightarrow -(M - m) \leq F(x) - F(y) \leq M - m$$

$$\Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq M - m < \varepsilon \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon$$

(d) Continúe de esta manera para hallar una sucesión de intervalos  $I_n = [a_n, b_n]$  tales que  $\sup\{f(x) : x \in I_n\} - \inf\{f(x) : x \in I_n\} < 1/n$ . Aplique el Teorema de los Intervalos Encajados (Problema 8-14) para hallar un punto  $x$  en el cual  $f$  es continua.

Lema. Si  $F$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces existe una sucesión de intervalos  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

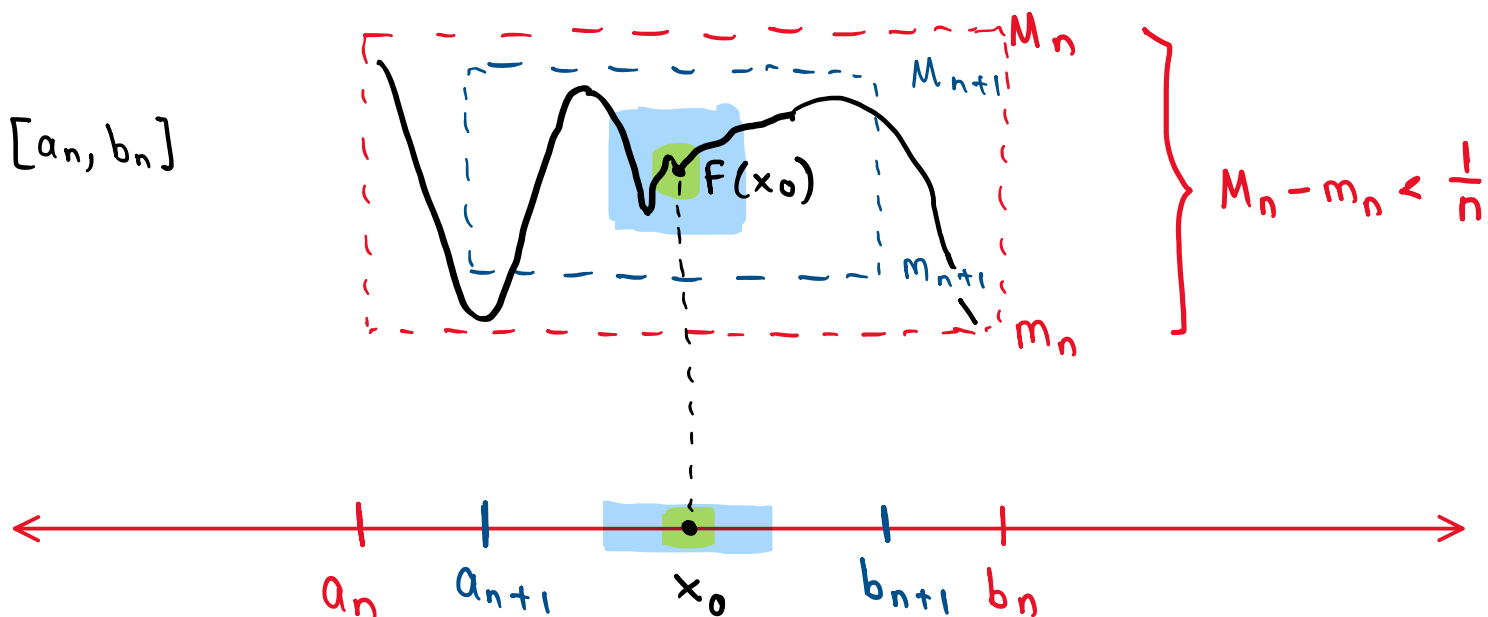
$$a < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < b \quad \text{y}$$

$$\sup \{ F(x) \mid x \in [a_n, b_n] \} - \inf \{ F(x) \mid x \in [a_n, b_n] \} < \frac{1}{n}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

$$a_n < a_{n+1} \leq x_0 \leq b_{n+1} < b_n$$

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$



Teorema. Si  $F$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $F$  es continua en  $x_0$ .

Demostración.

Por el lema anterior, existe una sucesión de intervalos  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$a < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < b \quad \text{y}$$

$$\sup \{F(x) \mid x \in [a_n, b_n]\} - \inf \{F(x) \mid x \in [a_n, b_n]\} < \frac{1}{n}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

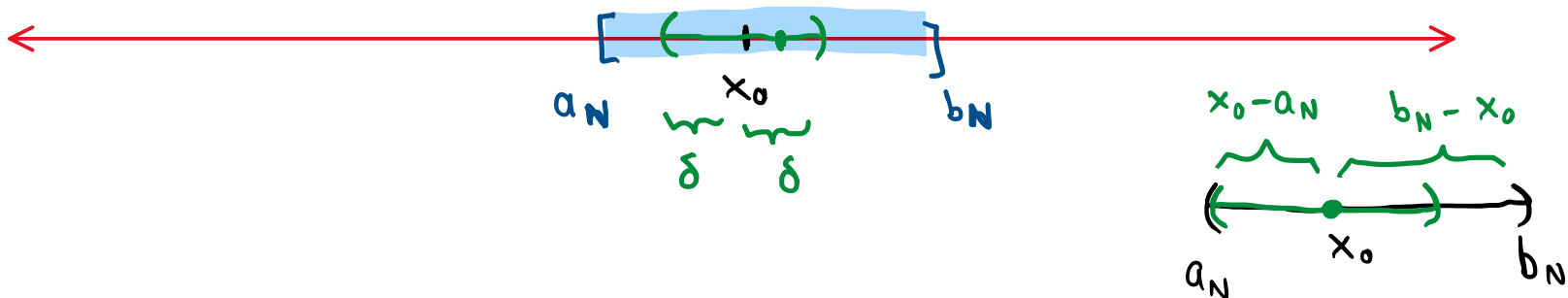
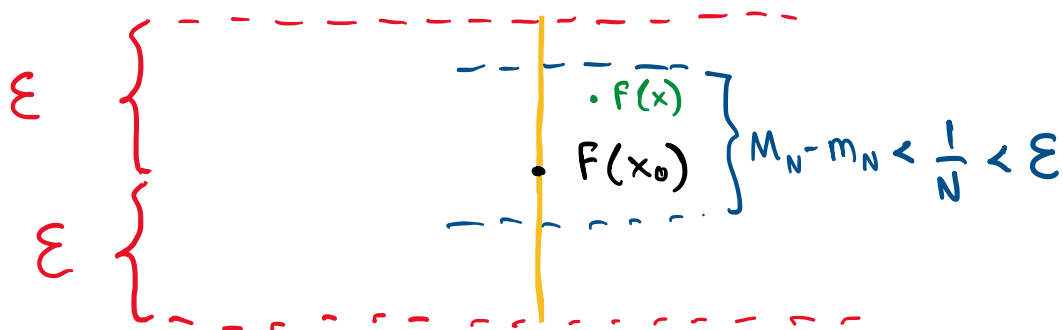
Como  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por el Teorema de los intervalos anidados,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ . Sea  $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ .

Notemos que  $a < a_1 \leq x_0 \leq b_1 < b \Rightarrow a < x_0 < b \Rightarrow x_0 \in (a, b)$ .

Mostraremos que  $F$  es continua en  $x_0$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ .

P.D.  $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon)$



Por la propiedad arquimediana, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N} < \epsilon$ .

Notemos que como  $x_0 \in [a_{N+1}, b_{N+1}] \Rightarrow a_N < a_{N+1} \leq x_0 \leq b_{N+1} < b_N$

$$\Rightarrow a_N < x_0 < b_N$$

Definimos  $\delta = \min \{x_0 - a_N, b_N - x_0\} \Rightarrow \delta > 0$

Dado que  $\delta \leq x_0 - a_N$  y  $\delta \leq b_N - x_0 \Rightarrow a_N \leq x_0 - \delta$  y  $x_0 + \delta \leq b_N$

Sea  $x \in [a, b]$  tal que  $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow a_N \leq x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \leq b_N$$

$$(a, b) \subsetneq [a, b]$$



$$\Rightarrow a_N < x < b_N \Rightarrow a_N \leq x \leq b_N$$

$$\Rightarrow x \in [a_N, b_N]$$

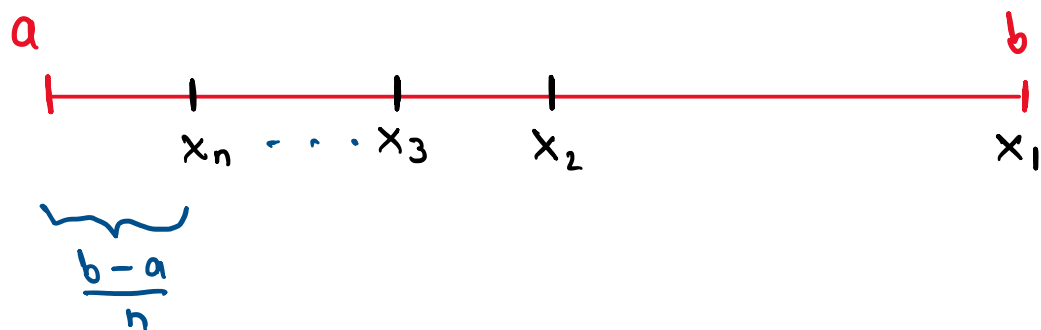
Sean  $M_N = \sup \{F(x) \mid x \in [a_N, b_N]\}$  y  $m_N = \inf \{F(x) \mid x \in [a_N, b_N]\}$ .

Debido al lema (\*), como  $x, x_0 \in [a_N, b_N]$  por construcción

$$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \leq M_N - m_N < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

$\therefore F$  es continua en  $x_0$ .

(e) Demuestre que  $f$  es continua en infinitos puntos de  $[a, b]$ .



$$x_n = a + \frac{b-a}{n}$$

Consideremos una sucesión de puntos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contenida en  $[a, b]$  y que sea estrictamente decreciente, es decir,

$$a \leq x_{n+1} < x_n \leq b.$$

(Por ejemplo, podemos definir  $x_n = a + \frac{b-a}{n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ).

Como  $f$  es integrable en  $[a, b] \Rightarrow f$  es integrable en  $[x_{n+1}, x_n]$   
 $\Rightarrow$  existe  $y_n \in (x_{n+1}, x_n)$  tal que  $f$  es continua en  $y_n$ .

Notemos ahora que

$$a \leq \dots < x_{n+1} < y_n < x_n < \dots < x_3 < y_2 < x_2 < y_1 < x_1 \leq b$$

(los puntos  $y_n$  son distintos).

$\therefore \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto infinito de puntos en  $[a, b]$  donde  $f$  es continua.

Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable, podemos definir una nueva Función

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t) dt$$

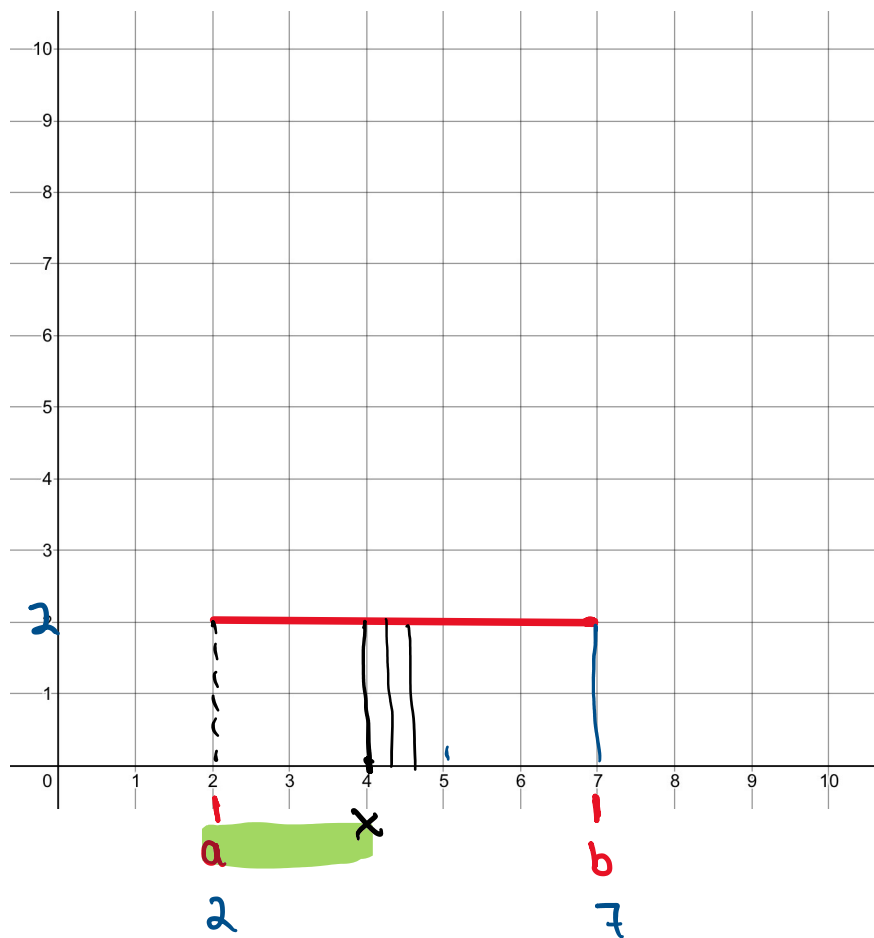
Observación:

$$F(a) = \int_a^a f = 0$$

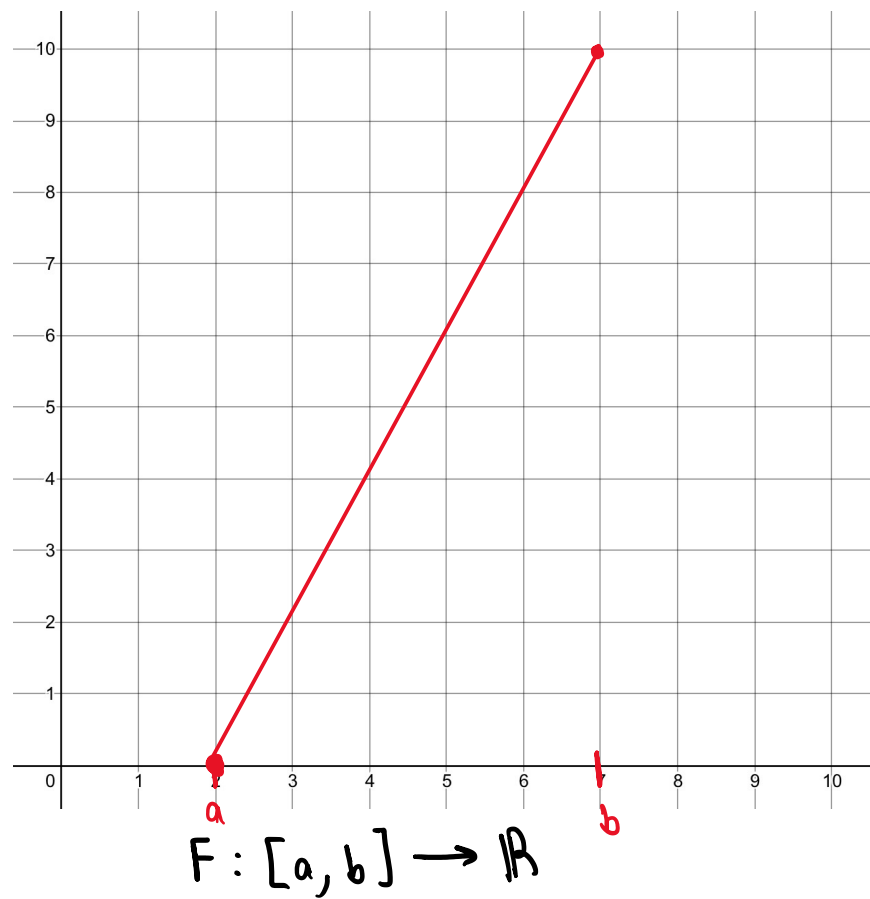
$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b F(t) dt = \int_a^b F(y) dy$$

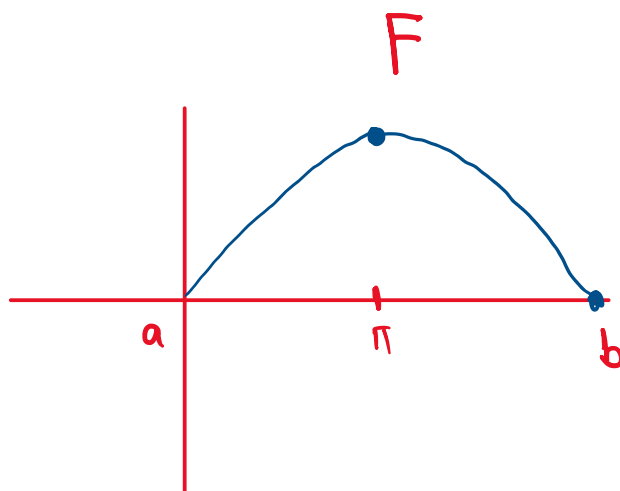
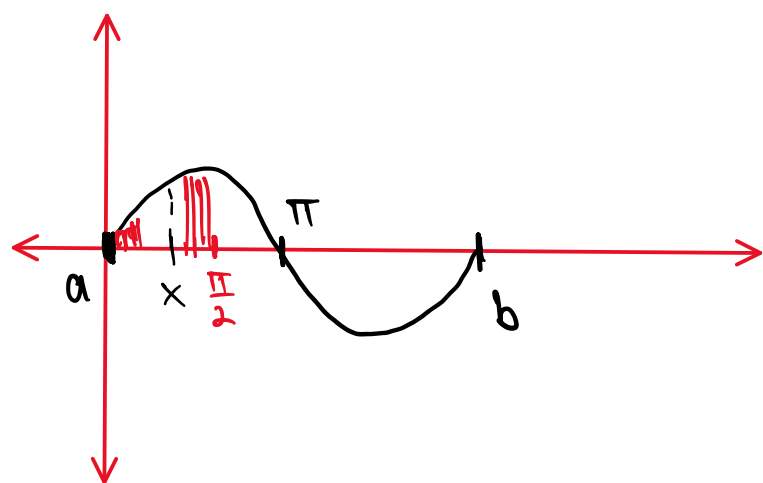
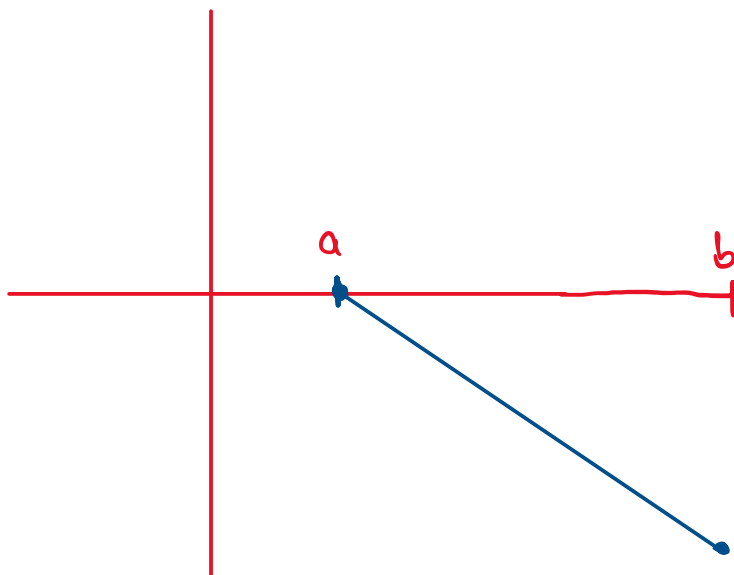
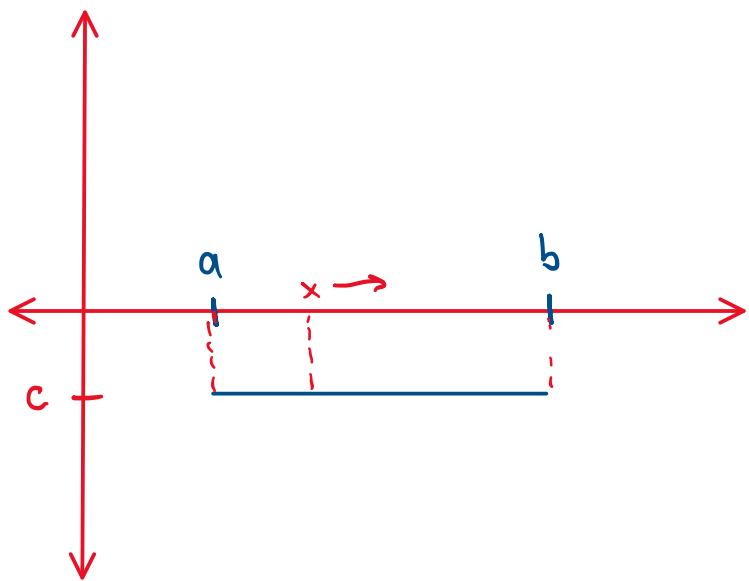
Ejemplos:

$F(x)$

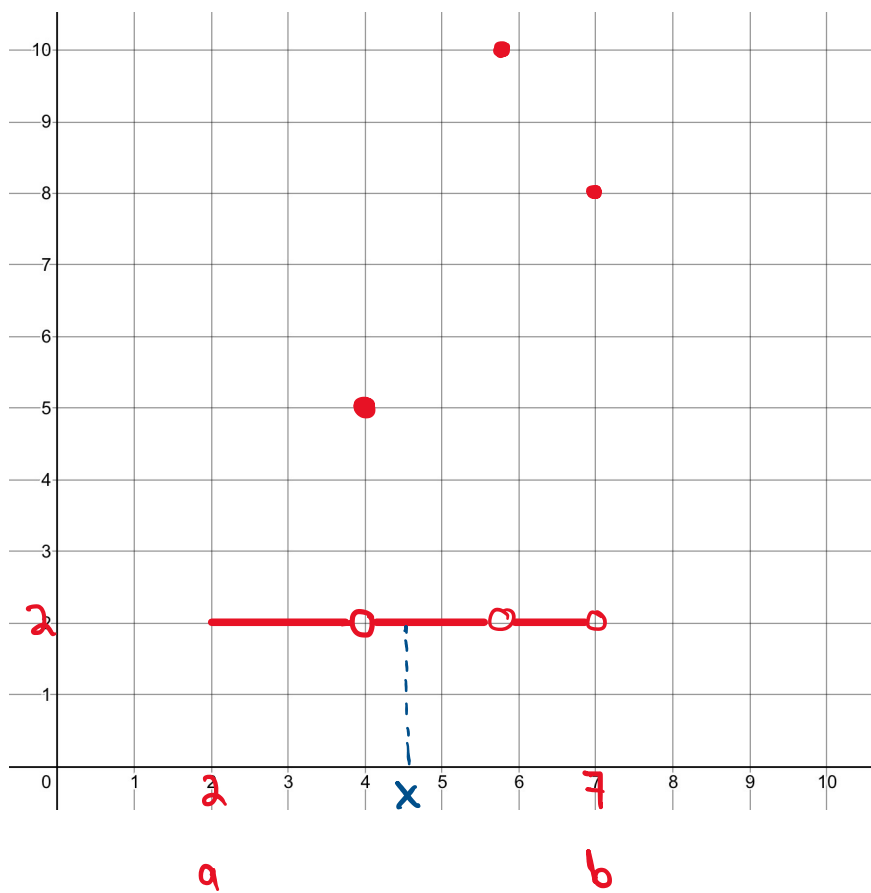


$F(x) = \int_a^x f(t) dt$

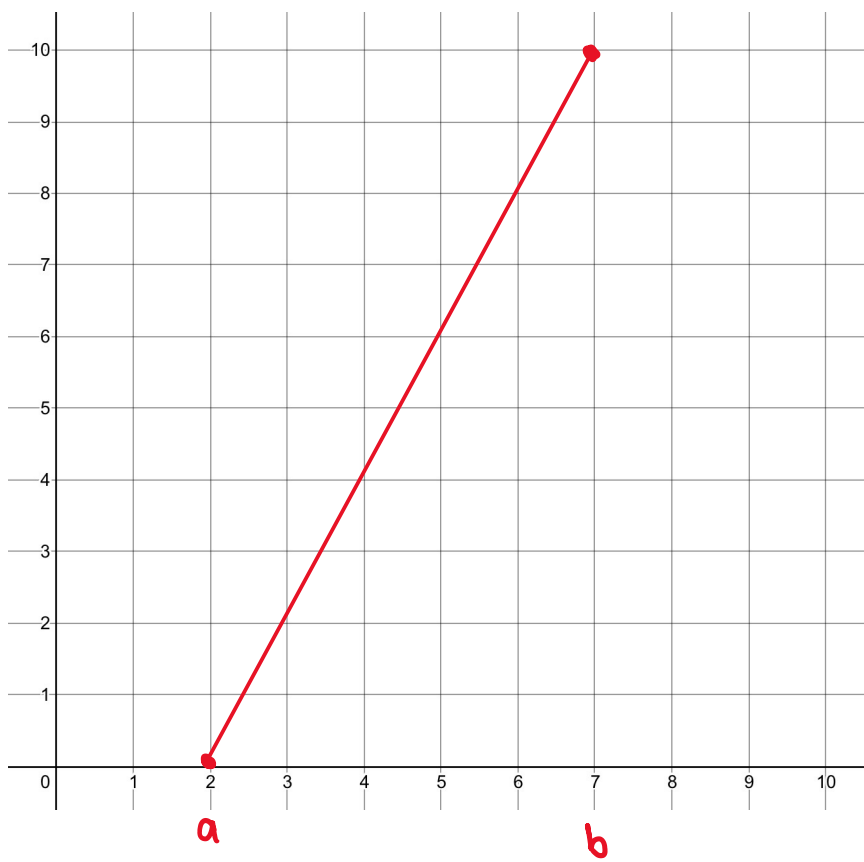




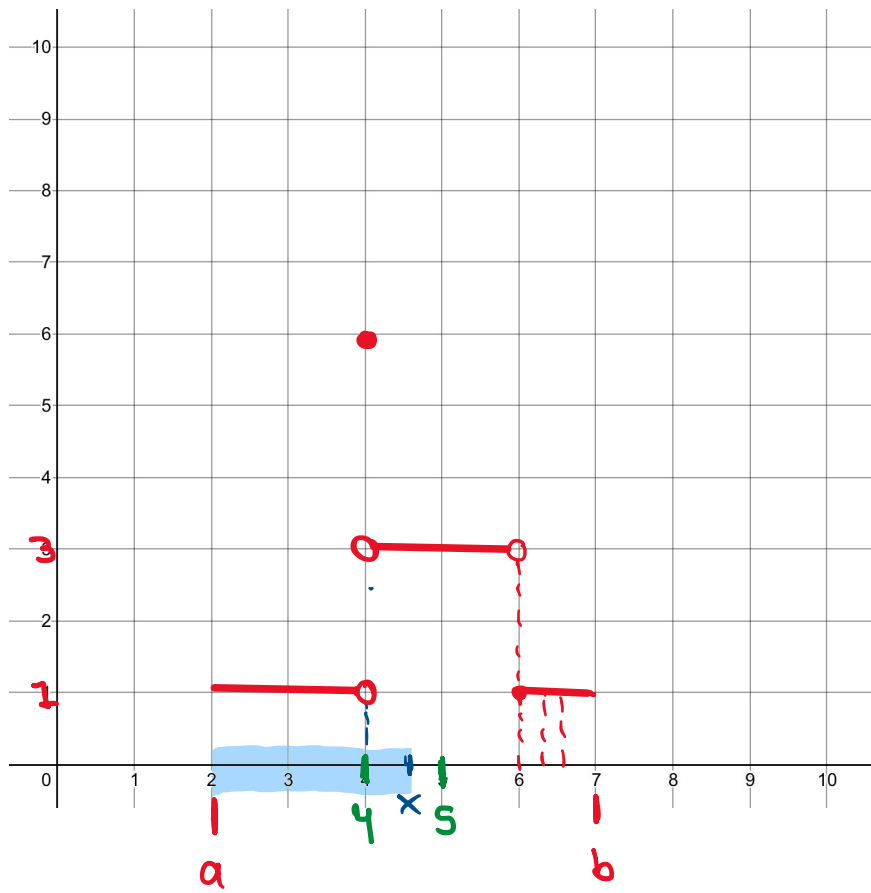
$F(x)$



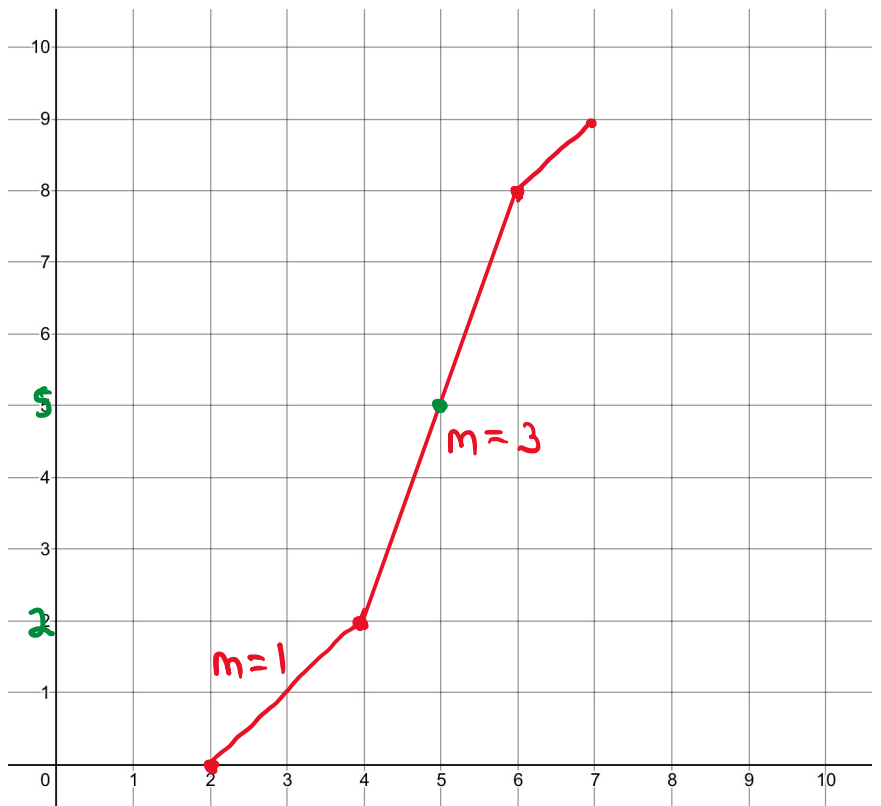
$$F(x) = \int_a^x F(t) dt$$



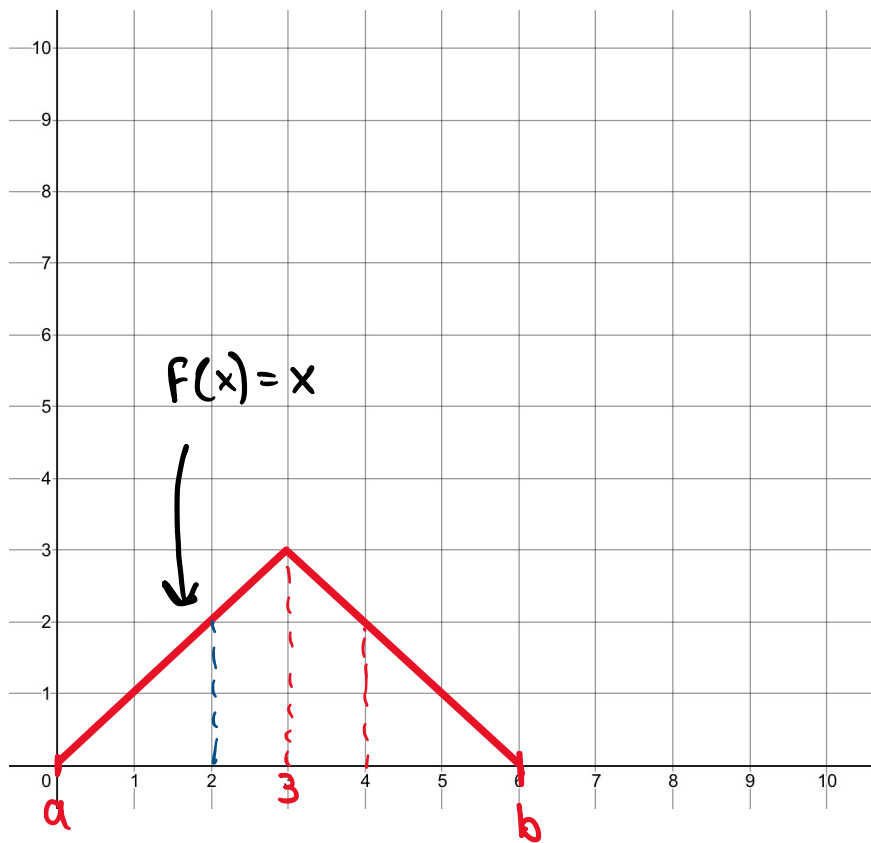
$F(x)$



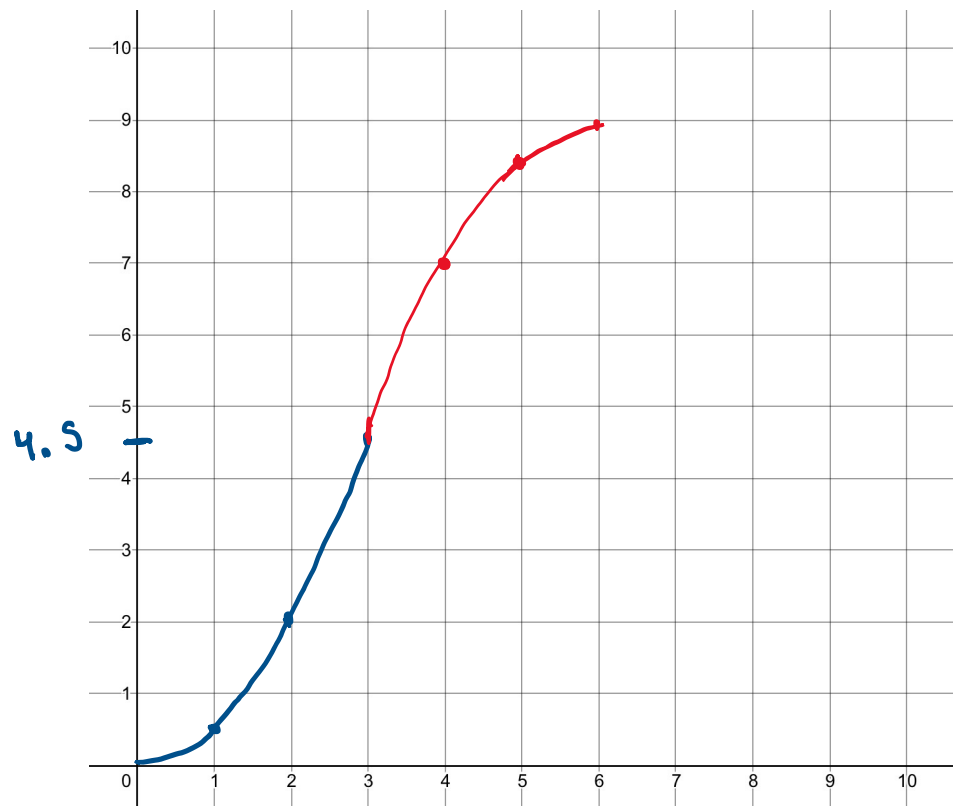
$$F(x) = \int_a^x F(t) dt$$



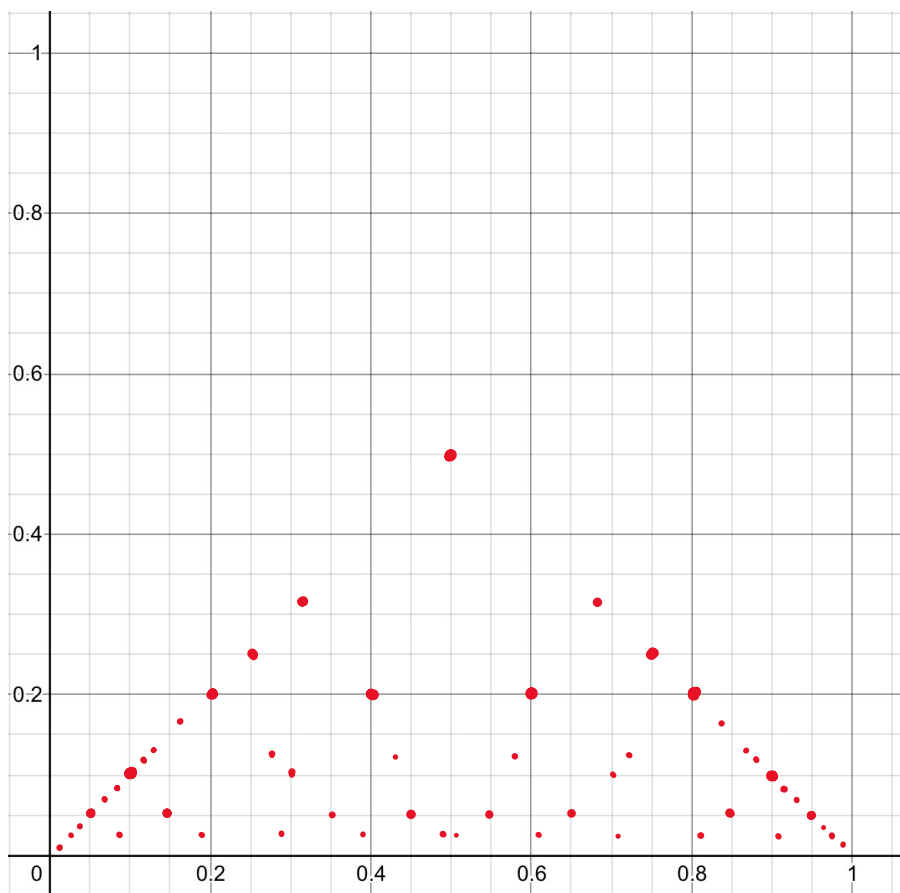
$F(x)$



$$F(x) = \int_a^x F(t) dt$$

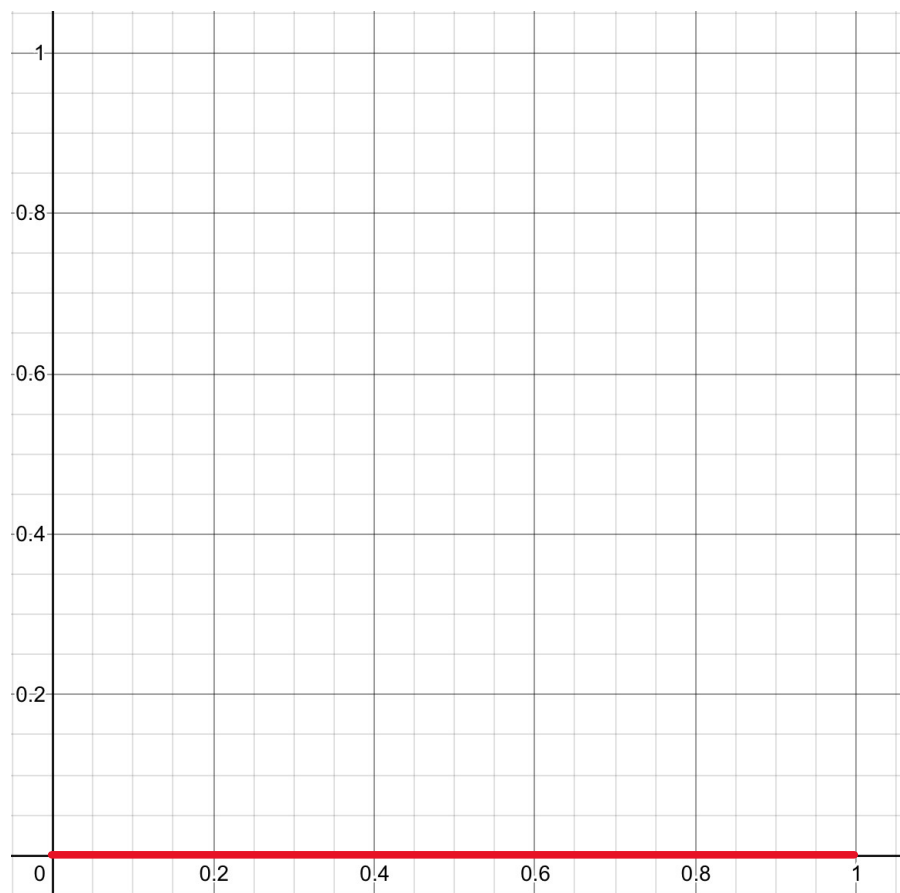


$f(x)$



Función de Thomae

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$



Teorema Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como

$$F(x) = \int_a^x f,$$

entonces  $F$  es continua en  $[a, b]$ .