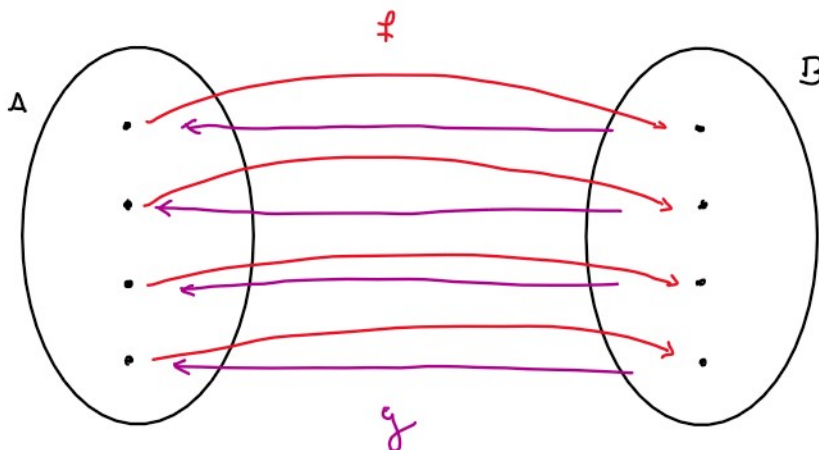


Funciones inversas y el teorema de los intervalos anidados

jueves, 3 de marzo de 2022

Funciones inversas

Sea $f: A \rightarrow B$ una función biyectiva, es decir, para cada $b \in B$ existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = b$.



Podemos definir $g: B \rightarrow A$ como $g(b) = a$ donde $f(a) = b$.

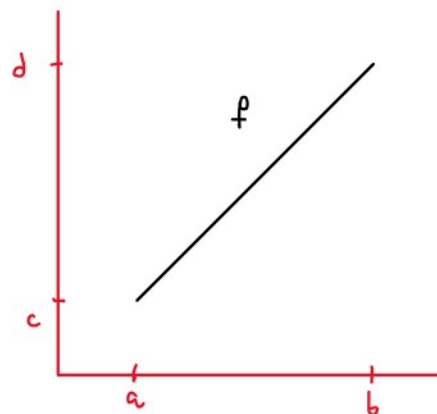
Definición. Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Decimos que f es invertible o que f tiene inversa si existe $g: B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$.

A g se le conoce como la inversa de f , y se denota por $g = f^{-1}$.

f es invertible $\Leftrightarrow f$ es biyectiva

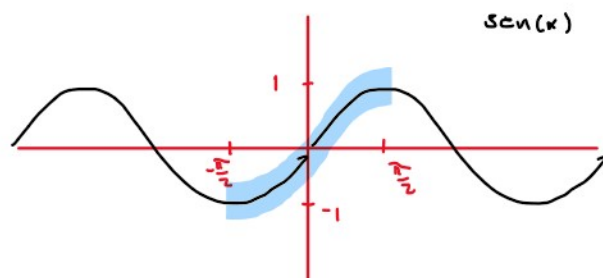
~ Si f es inyectiva, se puede restringir el codominio de f para hacerla biyectiva.

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva pero no surya
 $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ es biyectiva

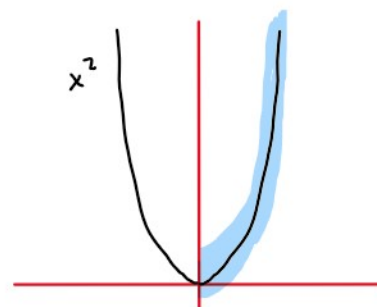


~ Si f no es inyectiva ni supra, en ocasiones se puede modificar $\text{dom}(f)$ y $\text{codom}(f)$ para que sea biyectiva.

- $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no es inyectiva ni supra
 $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ si es biyectiva



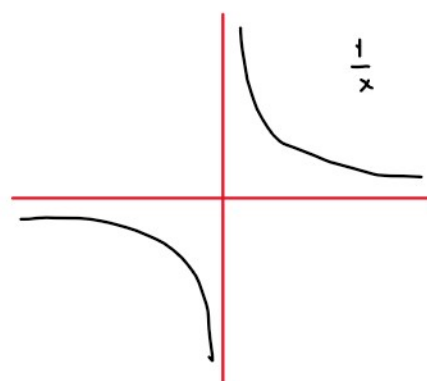
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = x^2$
 f no es inyectiva ($f(2) = f(-2)$, $2 \neq -2$)
ni suprayectiva (no existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. $x^2 = -1$)
 $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ si es biyectiva



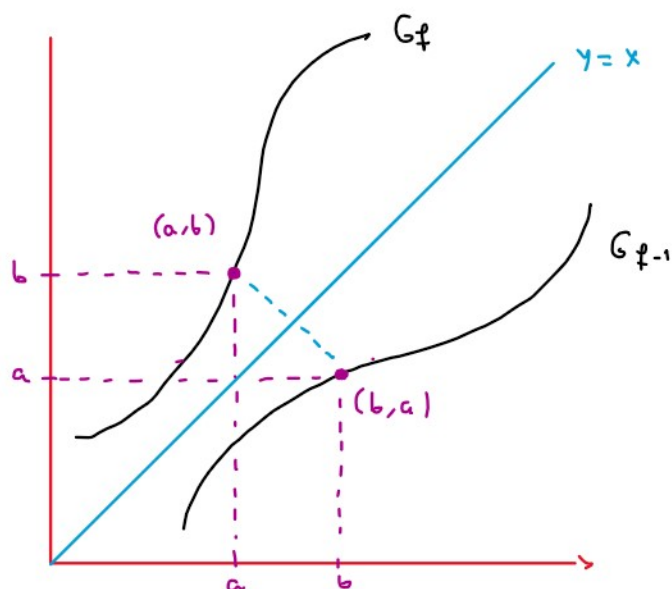
- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{1}{x}$
no es supra
 $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es biyectiva

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

$$\Rightarrow f^{-1} = f$$



- Gráfica de f^{-1}



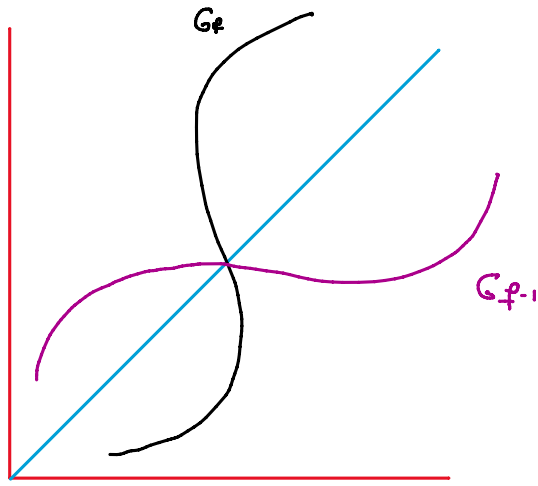
$$(a, b) \in G_f$$

$$\Leftrightarrow b = f(a)$$

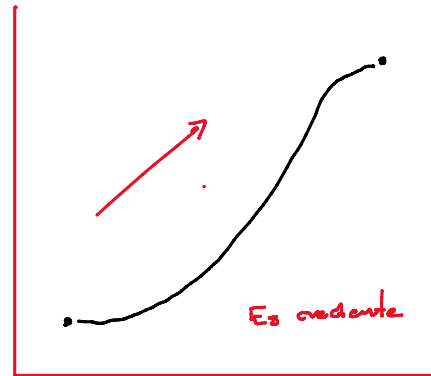
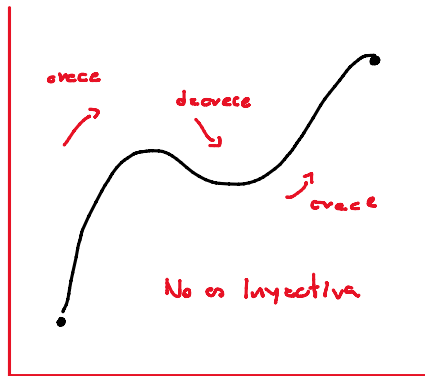
$$\Leftrightarrow f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

$$\Leftrightarrow (b, a) \in G_{f^{-1}}$$

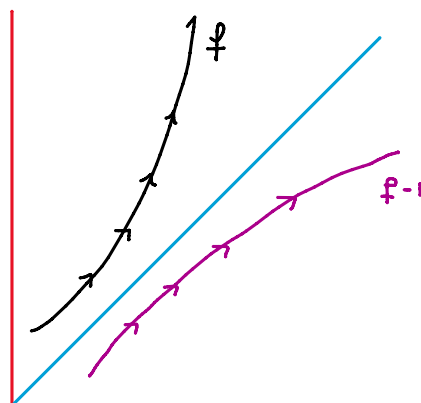
Para dibujar $G_{f^{-1}}$, basta reflejar G_f respecto a la recta identidad $y=x$



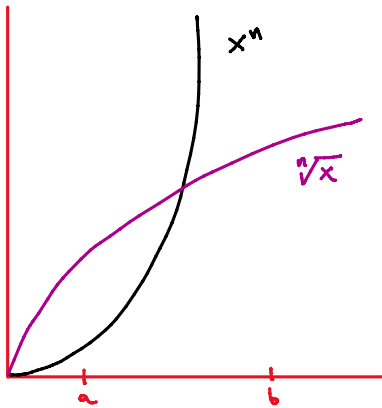
Teorema. Si f es inyectiva y continua en un intervalo, entonces es estrictamente creciente o est. decreciente en ese intervalo.



Teorema. Si f es estrictamente creciente (decreciente), entonces f^{-1} también es estrictamente creciente (decreciente).



Teorema. Si f es continua e inyectiva en un intervalo, entonces f^{-1} también es continua.



Sea $f(x) = x^n$.

f es continua e inyectiva en $[a, b]$

$\Rightarrow f^{-1}$ es continua en $[a, b]$

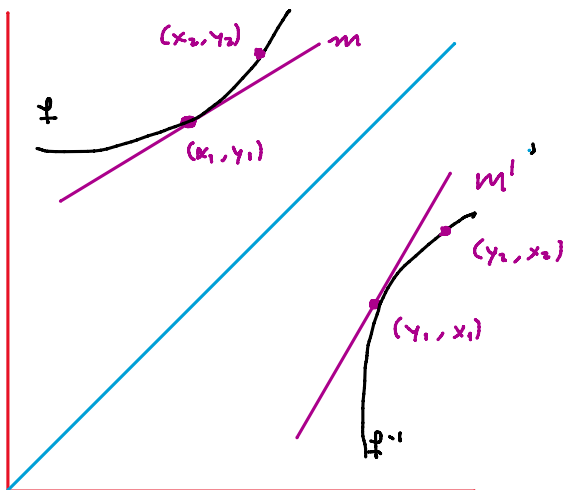
$\Rightarrow f^{-1}$ es integrable sobre $[a, b]$

Teorema (derivada de la función inversa)

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva definida sobre un intervalo. Si $b \in f(I)$ y $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en b y

$\downarrow$
 $\exists a \in I (f(a) = b)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$



$$m = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow m' = \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{1}{m}$$

Intervalos anidados.

Decimos que una familia de intervalos $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está anidada si

$I_{n+1} \subset I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\dots \subset I_4 \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1$$

Ejemplo. Sea $I_n = (0, \frac{1}{n})$ p. c. $n \in \mathbb{N}$

Sabemos que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow (0, \frac{1}{n+1}) \subset (0, \frac{1}{n})$

Así, $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de intervalos anidados.

Definimos $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x \mid x \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

$$0 \notin (0, \frac{1}{n}) \text{ p. c. } n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Afirmación: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$

Supongamos por contradicción que existe $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

$$\Rightarrow x \in I_1 = (0, 1)$$

$$\Rightarrow x > 0$$

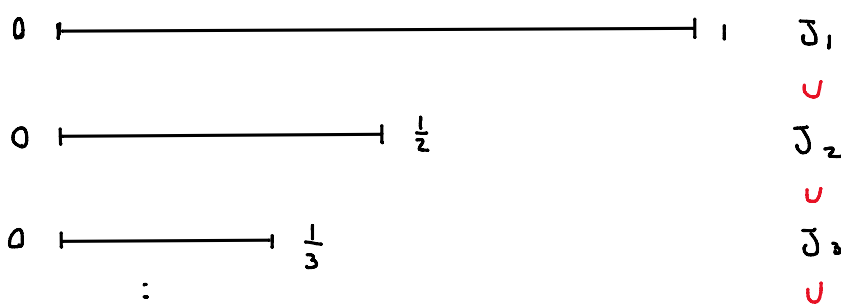
$$\text{Por p. A. existe } n \in \mathbb{N} \text{ t. q. } \frac{1}{n} < x \Rightarrow x \notin (0, \frac{1}{n}) = I_n$$

$$\Rightarrow x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \nabla$$

Ejemplo. Sea $J_n = [0, \frac{1}{n}]$

$$\Rightarrow J_{n+1} = [0, \frac{1}{n+1}] \subset [0, \frac{1}{n}] = J_n \text{ p. c. } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \{J_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una familia anidada de intervalos



Afirmación: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n = \{0\}$

$$\supseteq 0 \in [0, \frac{1}{n}] \quad \text{p.c. } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$$

$$\subseteq \text{ Sea } x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \Rightarrow x \in J_n = [0, \frac{1}{n}] \quad \text{p.c. } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \quad \text{p.c. } n \in \mathbb{N}$$

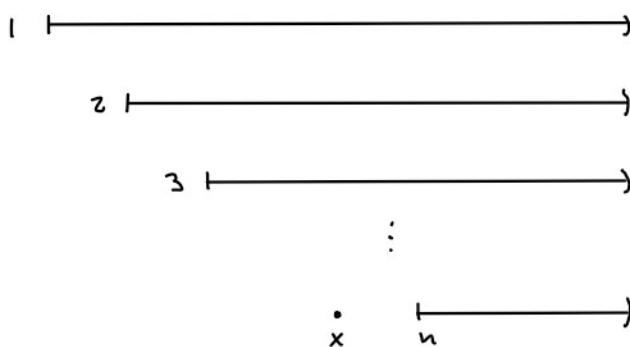
$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 = \{0\}$$

Ejemplo. Sea $K_n = [n, \infty)$ p.c. $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Sabemos que } n < n+1 \Rightarrow K_{n+1} = [n+1, \infty) \subset [n, \infty) = K_n$$

$\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una familia anidada



$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$$

$$\text{Sea } x > 1$$

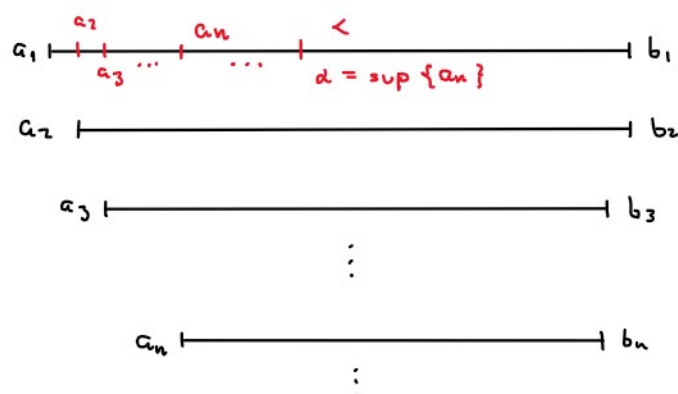
$$\Rightarrow \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x < n$$

$$\Rightarrow x \notin [n, \infty)$$

Teorema de los intervalos anidados

Si $I_n = [a_n, b_n]$ es una familia anidada de intervalos cerrados y acotados,

entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in I_n$ p.c. $n \in \mathbb{N}$ ($\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$)



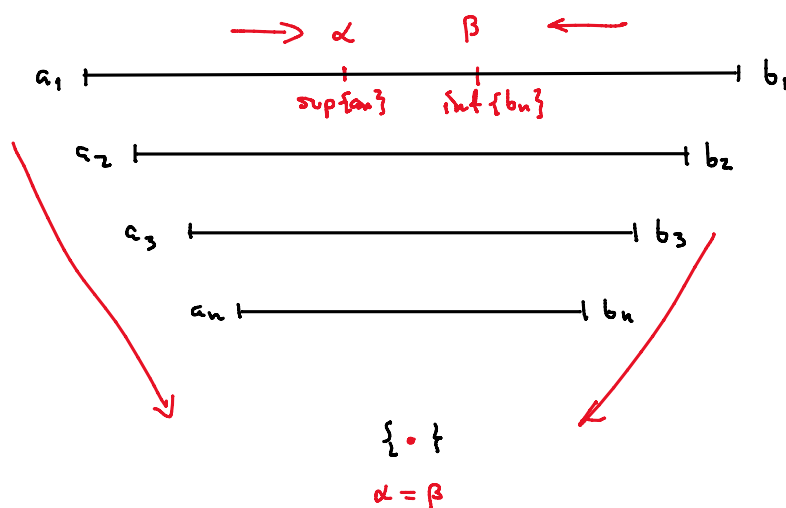
1

Idea: $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ esta anidada $\Rightarrow [a_n, b_n] \subset I_n \subset I_1 = [a_1, b_1]$
 $\Rightarrow a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_1$

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ y esta acotado superiormente por b_1
 $\Rightarrow$ existe $\alpha = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

P.D. $\alpha \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

Teorema. Si $I_n = [a_n, b_n]$ es una familia anidada de intervalos cerrados y acotados tales que $\inf \{b_n - a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$

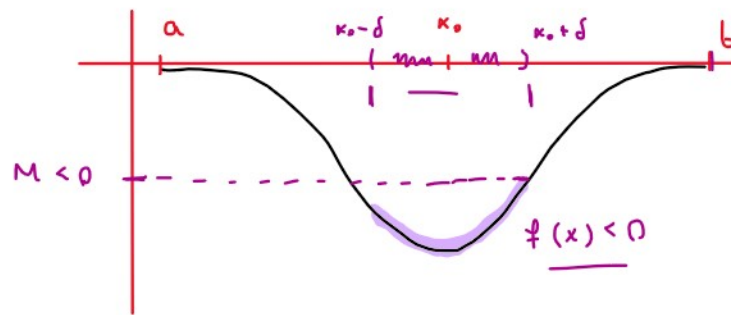


Idea: Existen $\alpha = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\beta = \inf \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

P.D. $\alpha = \beta$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$.

Ejercicio. Supón que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, b]$, $f(x) \leq 0$ para cada $x \in [a, b]$, f es continua en $x_0 \in [a, b]$ y $f(x_0) < 0$.

Demuestra que $\int_a^b f(x) dx < 0$



Sol. Sea $\varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Como f es continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \underline{f(x) - f(x_0)} \leq |f(x) - f(x_0)| < \underline{-\frac{f(x_0)}{2}} \quad (a \leq |a|)$$

$$\Rightarrow f(x) < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0 \quad \text{p. c. } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} \quad (*)$$

Supongamos que $x_0 \in (a, b)$ y $a < x_0 - \frac{\delta}{2} < x_0 + \frac{\delta}{2} < b$. Sea

$$M = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \}$$

$$(*) \Rightarrow M \leq \frac{f(x_0)}{2} < 0$$

Definimos $P = \{a, x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}, b\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$, y notamos que

$$M_{[a, x_0 - \delta]} = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, x_0 - \delta] \} \leq 0 \quad \text{y} \quad M_{[x_0 + \delta, b]} \leq 0$$

Ya que f es integrable, se sigue que

$$\int_a^b f \leq U(f, P) = M_{[a, x_0 - \delta]} ((x_0 - \delta) - a) + M((x_0 + \frac{\delta}{2}) - (x_0 - \frac{\delta}{2})) + M_{[x_0 + \delta, b]} (b - (x_0 + \delta))$$

$$\leq 0 + M\delta + 0 \quad M < 0$$

$$< 0$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b f} < 0$$