

Teorema del valor medio generalizado para integrales

Si f es continua en $[a, b]$, g es integrable en $[a, b]$ y $g(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$ (o $g(x) \leq 0$ para toda $x \in [a, b]$), entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

Demostración.

Supongamos que $g(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$

Como f es continua en $[a, b]$, sabemos que f alcanza su valor máximo M y su valor mínimo m en $[a, b]$.

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$$

$g(x) \geq 0$

$$\Rightarrow m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } \int_a^b g(x)dx = 0 &\Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq 0 \\ &\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \end{aligned}$$

En este caso, para cualquier $c \in [a, b]$ se cumple que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx = 0.$$

• Si $\int_a^b g(x) dx \neq 0$, como $g(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces

$\int_a^b g(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx > 0$. Se sigue de (*) que

$$m \leq \frac{\int_a^b F(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

Usando nuevamente que F es continua en $[a, b]$, por el Teorema del Valor Intermedio tenemos que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$F(c) = \frac{\int_a^b F(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

$$\therefore \int_a^b F(x)g(x) dx = F(c) \int_a^b g(x) dx.$$

* El caso cuando $g(x) \leq 0$ para toda $x \in [a, b]$ se deja como ejercicio.

• Formas de demostrarlo:

i) hacer una prueba análoga con todos los pasos.

ii) Definir $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(x) = -g(x)$

$\Rightarrow h(x) = -g(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$.

Podemos aplicar el caso anterior a F y h

Teorema del valor medio generalizado para integrales

Si f es continua en $[a, b]$, g es integrable en $[a, b]$ y $g(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$ (o $g(x) \leq 0$ para toda $x \in [a, b]$), entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

* El Teorema del valor medio para integrales es un caso particular de Teorema del Valor Medio Generalizado (tomando $g(x) \equiv 1$).

$$\int_a^b f(x) \cdot 1 dx = f(c) \int_a^b 1 dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b-a)$$

(Ejercicio del libro de Spivak).

*30. El objetivo de este problema es demostrar que si f es integrable en $[a, b]$, entonces f debe ser continua en muchos puntos de $[a, b]$.

(a) Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ con $U(f, P) - L(f, P) < b - a$. Demuestre que para algún i se tiene $M_i - m_i < 1$.

Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < b - a$$

Supongamos que no existe $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $M_i - m_i < 1$, es decir,

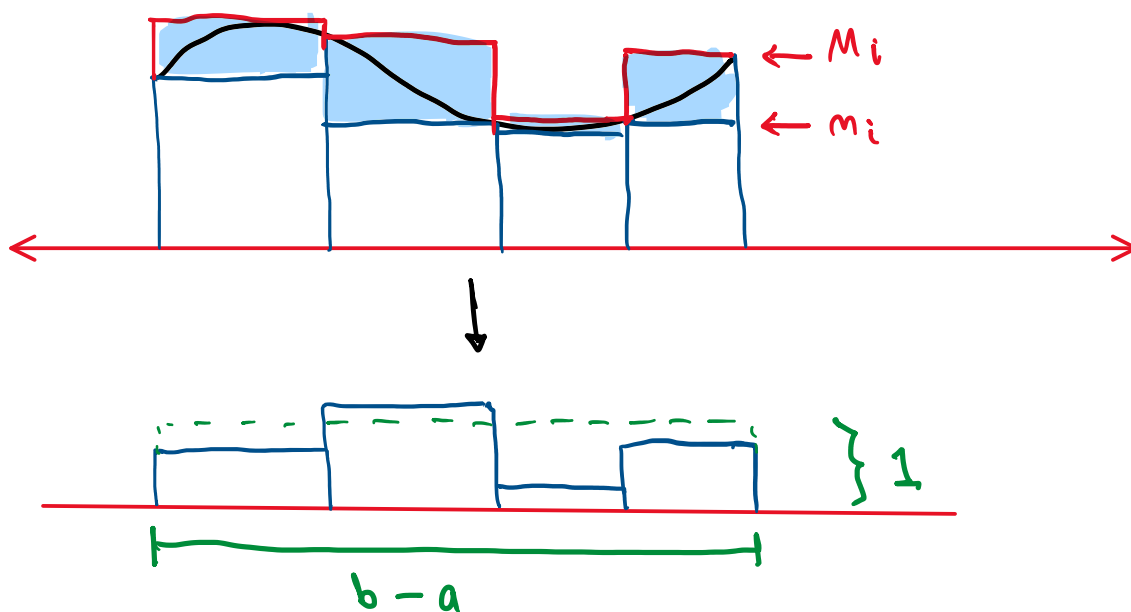
$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad M_i - m_i \geq 1$$

$$\Rightarrow (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \geq (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) \geq b - a \quad !$$

$\therefore$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $M_i - m_i < 1$



(b) Demuestre que existen números a_1 y b_1 con $a < a_1 < b_1 < b$ y $\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1$. (Se puede elegir $[a_1, b_1] = [t_{i-1}, t_i]$ de la parte (a) salvo si $i = 1$ ó n ; y en estos dos casos un artificio sencillo resuelve el problema.)

Debido a (a) sabemos que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $M_i - m_i < 1$

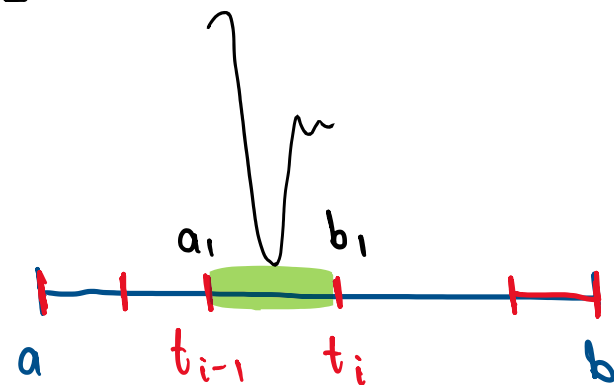
• Si $i \neq 1$ e $i \neq n \Rightarrow t_{i-1} \neq t_0 = a$ y $t_i \neq t_n = b$
 $\Rightarrow t_{i-1} \neq a$ y $t_i \neq b$

En este caso definimos $a_1 = t_{i-1}$ y $b_1 = t_i$

$$\Rightarrow a < a_1 < b_1 < b \quad \text{y} \quad \sup\{f(x) \mid a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) \mid a_1 \leq x \leq b_1\} = M_i - m_i < 1.$$

• Si $i = 1$

$$\Rightarrow t_{i-1} = t_0 = a$$



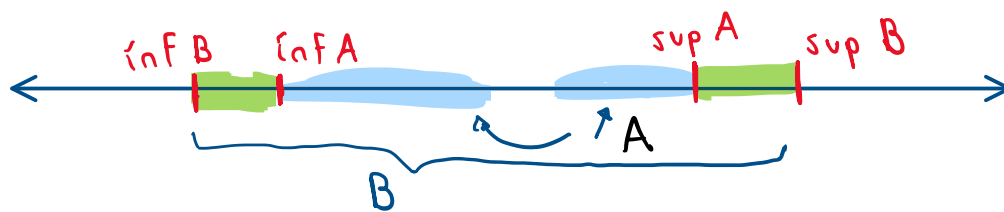
(no podemos elegir $a_1 = t_{i-1}$ porque a debe ser menor que a_1).

Sean $a_1 \in (t_{i-1}, t_i)$ y $b_1 = t_i \Rightarrow \underline{[a_1, b_1]} \subseteq [t_{i-1}, t_i] = \underline{[t_{i-1}, b_1]}$

* Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ acotados y no vacíos. Si $A \subseteq B$, entonces

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

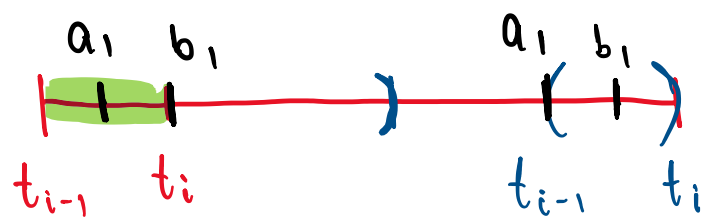
$$\Rightarrow \sup A - \inf A \leq \sup B - \inf B$$



$$\Rightarrow \sup\{f(x) \mid x \in [a_1, b_1]\} - \inf\{f(x) \mid x \in [a_1, b_1]\} \leq$$

$$\sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} - \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i - m_i < 1.$$

$$\left. \begin{array}{c} \text{--- } M_i \\ \text{--- } m_i \end{array} \right\} M_i - m_i < 1$$



• Si $i = n$

$$\Rightarrow t_i = b$$

(no podemos elegir $b_1 = t_i$ porque b_1 debe ser menor que b).

$$\text{Sean } b_1 \in (t_{i-1}, t_i) \text{ y } a_1 = t_{i-1} \Rightarrow \underline{[a_1, b_1]} \subseteq [t_{i-1}, t_i] = \underline{[a_1, t_i]}$$

$$\Rightarrow \sup \{ f(x) \mid x \in [a_1, b_1] \} - \inf \{ f(x) \mid x \in [a_1, b_1] \} \leq$$

$$\sup \{ f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} - \inf \{ f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} = M_i - m_i < 1.$$

En cualquier caso, existen $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tales que
 $a < a_1 < b_1 < b$ y

$$\sup \{ f(x) \mid x \in [a_1, b_1] \} - \inf \{ f(x) \mid x \in [a_1, b_1] \} < 1$$

(c) Demuestre que existen números a_2 y b_2 con $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ y $\sup \{ f(x) : a_2 \leq x \leq b_2 \} - \inf \{ f(x) : a_2 \leq x \leq b_2 \} < \frac{1}{2}$.

Como f es integrable en $[a, b]$ y $a < a_1 < b_1 < b$, entonces f es integrable en $[a_1, b_1]$. Dado que $\frac{b_1 - a_1}{2} > 0$, entonces existe

$P = \{ t_0, \dots, t_n \} \in \mathcal{P}_{[a_1, b_1]}$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{b_1 - a_1}{2}$$

Afirmación: existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $M_i - m_i < \frac{1}{2}$.

En otro caso, si $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad M_i - m_i \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \geq \frac{1}{2} (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow U(F, P) - L(F, P) \geq \frac{1}{2} (b_1 - a_1)!$$

• Si $i \neq 1$ e $i \neq n \Rightarrow t_{i-1} \neq t_0 = a_1$ y $t_i \neq t_n = b_1$

$$\Rightarrow t_{i-1} \neq a_1 \text{ y } t_i \neq b_1$$

En este caso definimos $a_2 = t_{i-1}$ y $b_2 = t_i$

$$\Rightarrow a_1 < a_2 < b_2 < b_1 \text{ y } \sup \{f(x) \mid a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf \{f(x) \mid a_2 \leq x \leq b_2\} \\ = M_i - m_i < \frac{1}{2}$$

• Si $i = 1$

$$\Rightarrow t_{i-1} = t_0 = a_1$$

$$\text{Sean } a_2 \in (t_{i-1}, t_i) \text{ y } b_2 = t_i \Rightarrow [a_2, b_2] \subseteq [t_{i-1}, t_i]$$

$$\Rightarrow \sup \{f(x) \mid x \in [a_2, b_2]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [a_2, b_2]\} \leq$$

$$\sup \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i - m_i < \frac{1}{2}$$

• Si $i = n$

$$\Rightarrow t_i = t_n = b_1$$

$$\text{Sean } b_2 \in (t_{i-1}, t_i) \text{ y } a_2 = t_{i-1} \Rightarrow [a_2, b_2] \subseteq [t_{i-1}, t_i]$$

$$\Rightarrow \sup \{f(x) \mid x \in [a_2, b_2]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [a_2, b_2]\} \leq$$

$$\sup \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i - m_i < \frac{1}{2}$$

En cualquier caso, existen $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tales que
 $a < a_1 < a_2 < b_2 < b_1 < b$ y

$$\sup \{ f(x) \mid x \in [a_2, b_2] \} - \inf \{ f(x) \mid x \in [a_2, b_2] \} < \frac{1}{2}$$

(d) Continúe de esta manera para hallar una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ tales que $\sup \{ f(x) : x \in I_n \} - \inf \{ f(x) : x \in I_n \} < 1/n$. Aplique el Teorema de los Intervalos Encajados (Problema 8-14) para hallar un punto x en el cual f es continua.

Lema Si f es integrable en $[a, b]$, entonces existe una sucesión de intervalos $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $I_n = [a_n, b_n]$,

$$a < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < b$$

$$\text{y } \sup \{ f(x) \mid x \in [a_n, b_n] \} - \inf \{ f(x) \mid x \in [a_n, b_n] \} < \frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dem. Como f es integrable en $[a, b]$ y $b - a > 0$, existe $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ t.q. $U(f, P) - L(f, P) < b - a$.

A partir de esto, en (a) y (b) se definieron a_1 y b_1 que cumplen (*)

Sea $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $I_k = [a_k, b_k]$ ha sido definido para $k \leq m$ $(I_1, \dots, I_m)$ de manera que cumplen (*).

Debemos definir I_{m+1} .

Tenemos que $a < a_m < b_m < b$

Como f es integrable en $[a, b]$ y $a < a_m < b_m < b$ entonces f es integrable en $[a_m, b_m]$. Dado que $\frac{b_m - a_m}{m+1} > 0$, entonces existe

$P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a_m, b_m]}$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{b_m - a_m}{m+1}$$

Afirmación: existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $M_i - m_i < \frac{1}{m+1}$

En otro caso, si $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad M_i - m_i \geq \frac{1}{m+1}$

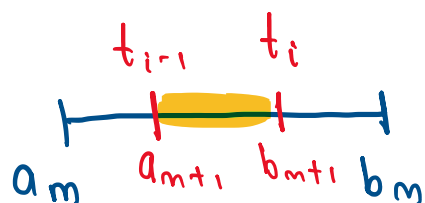
$$\Rightarrow (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \geq \frac{1}{m+1} (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \geq \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) \geq \frac{1}{m+1} (b_m - a_m) \quad \text{!}$$

• Si $i \neq 1$ e $i \neq n \Rightarrow t_{i-1} \neq t_0 = a_m$ y $t_i \neq t_n = b_m$

$$\Rightarrow t_{i-1} \neq a_m \text{ y } t_i \neq b_m$$



En este caso definimos $a_{m+1} = t_{i-1}$ y $b_{m+1} = t_i$

$$\Rightarrow a < a_m < a_{m+1} < b_{m+1} < b_m < b$$

$$\sup \{f(x) \mid a_{m+1} \leq x \leq b_{m+1}\} - \inf \{f(x) \mid a_{m+1} \leq x \leq b_{m+1}\} = M_i - m_i < \frac{1}{m+1}$$

• Si $i = 1$

$$\Rightarrow t_{i-1} = t_0 = a_m$$

$$\text{Sean } a_{m+1} \in (t_{i-1}, t_i) \text{ y } b_{m+1} = t_i \Rightarrow [a_{m+1}, b_{m+1}] \subseteq [t_{i-1}, t_i]$$

$$\Rightarrow \sup \{f(x) \mid x \in [a_{m+1}, b_{m+1}]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [a_{m+1}, b_{m+1}]\} \leq$$

$$\sup \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i - m_i < \frac{1}{m+1}$$

• Si $i = n$

$$\Rightarrow t_i = t_n = b_m$$

$$\text{Sean } b_{m+1} \in (t_{i-1}, t_i) \text{ y } a_{m+1} = t_{i-1} \Rightarrow [a_{m+1}, b_{m+1}] \subseteq [t_{i-1}, t_i]$$

$$\Rightarrow \sup \{f(x) \mid x \in [a_{m+1}, b_{m+1}]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [a_{m+1}, b_{m+1}]\} \leq$$

$$\sup \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i - m_i < \frac{1}{m+1}$$

En cualquier caso, existen $a_{m+1}, b_{m+1} \in \mathbb{R}$ t.q.

$$a < a_m < a_{m+1} < b_{m+1} < b_m < b.$$

$$\sup \{ f(x) \mid x \in [a_{m+1}, b_{m+1}] \} - \inf \{ f(x) \mid x \in [a_{m+1}, b_{m+1}] \} < \frac{1}{m+1}$$