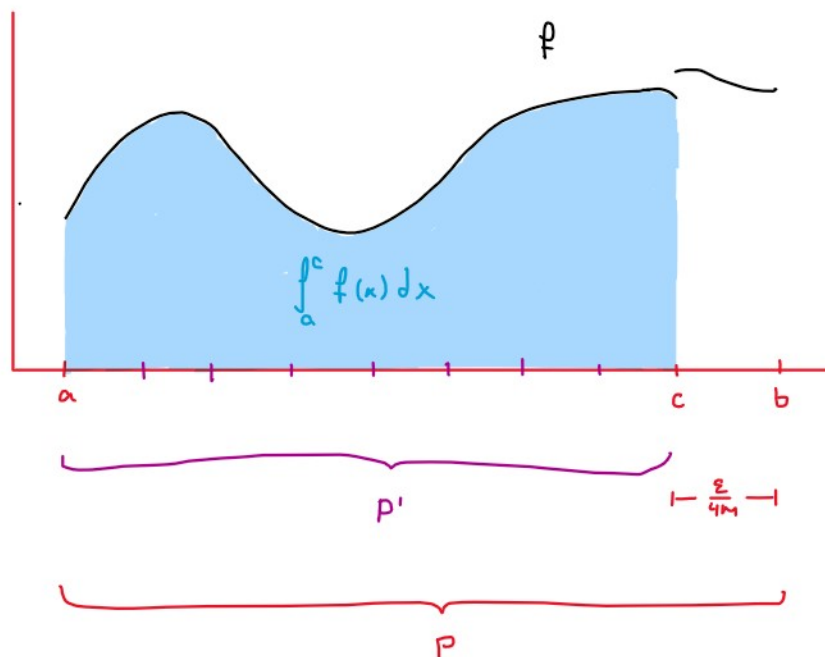


## Más ejercicios con funciones integrables (segunda parte)

martes, 1 de marzo de 2022

**Ejercicio.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y supongamos que para cualquier  $c \in (a, b)$ , la restricción de  $f$  al conjunto  $[a, c]$  es integrable. Demuestra que  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$



No sabemos que  $f$  es integrable en  $[c, b]$

**Sol.** Por hipótesis, existe  $M > 0$  t.q.  $|f(x)| < M$  p.u.  $x \in [a, b]$

Sea  $\epsilon > 0$  y supongamos que  $a < b - \frac{\epsilon}{4M} < b$

P.D.  $\exists P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$  ( $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ )

Como  $c = b - \frac{\epsilon}{4M} \in (a, b)$ , sabemos por hipótesis que  $f$  es integrable sobre  $[a, c]$

$\Rightarrow$  existe  $P' \in \mathcal{P}_{[a, c]}$  t.q.  $U(f, P') - L(f, P') < \frac{\epsilon}{2}$

Definimos  $P = P' \cup \{b\} = \{t_0 = a, \dots, t_n = c, t_{n+1} = b\}$

$\Rightarrow P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$

Notemos que si  $x \in [c, b] = [t_n, t_{n+1}]$ , entonces  $-M \leq f(x) \leq M$

es decir,  $-M$  es cota inferior de  $\{f(x) \mid x \in [t_n, t_{n+1}]\}$  y

$M$  es cota superior de  $\{f(x) \mid x \in [t_n, t_{n+1}]\}$

$$\Rightarrow -M \leq m_{n+1} \quad y \quad M_{n+1} \leq M$$

$$\Rightarrow M_{n+1} - m_{n+1} \leq M - (-M)$$

$$\Rightarrow M_{n+1} - m_{n+1} \leq 2M$$

Así,

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n+1} (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) + (M_{n+1} - m_{n+1}) (t_{n+1} - t_n) \\ &= [U(f, P') - L(f, P')] + (M_{n+1} - m_{n+1}) (b - c) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (2M) \left( \frac{\varepsilon}{4M} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ \Rightarrow U(f, P) - L(f, P) &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore f$  es integrable sobre  $[a, b]$

Resta probar que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

P.D.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall c \in [a, b] (0 < b - c < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right| < \varepsilon)$

Sea  $\varepsilon > 0$  y definimos  $\delta = \frac{\varepsilon}{4M} > 0$ .

Consideremos  $c \in (a, b)$  t. q.  $0 < b - c < \delta$ .

Ya que  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es integrable sobre  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , y

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right| = \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

Sea  $P = \{c, b\} \in \mathcal{P}_{[c,b]}$

$$\Rightarrow \int_c^b f(x) dx \leq U(f, P) = M_{[c,b]} (b-c) \leq M(b-c) < M\left(\frac{\varepsilon}{4M}\right) = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\gamma \quad \int_c^b f(x) dx \geq L(f, P) = m_{[c,b]} (b-c) > -M\left(\frac{\varepsilon}{4M}\right) = -\frac{\varepsilon}{4}$$

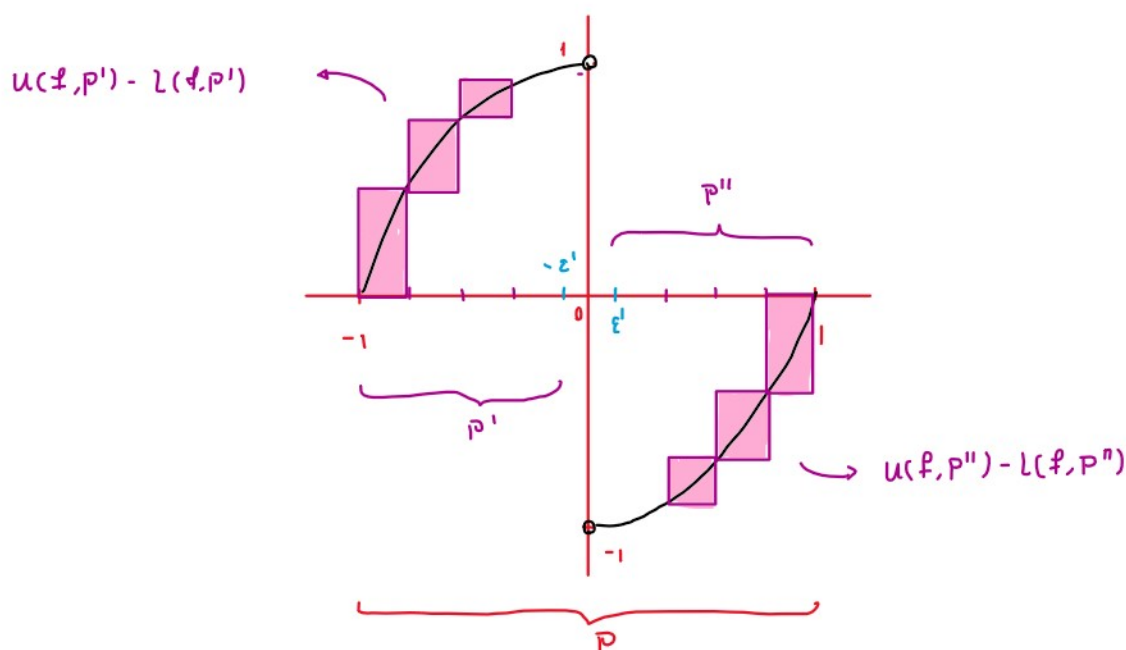
$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{4} < \int_c^b f(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right| = \left| \int_c^b f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

**Ejercicio.** Sea  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \in [-1, 0) \end{cases}$$



Demuestra que  $f$  es integrable sobre  $[-1, 1]$ .

**Sol.** Notamos que  $f$  es acotada, es decir, existe  $M > 0$  t.q.

$$|f(x)| < M \quad \text{p. c. } x \in [-1, 1]$$

Además, si  $x \in (0, 1] \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$

$\Rightarrow f$  es continua en  $(0, 1]$

Similarmemente  $f$  es continua en  $[-1, 0)$

Es decir,  $f$  está acotada en  $[-1, 1]$  y  $f$  es continua en  $[-1, 1]$

salvo en el punto  $x_0 = 0 \in (-1, 1)$

P. D.  $f$  es integrable sobre  $[-1, 1]$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $-1 < -\frac{\varepsilon}{12M}$  y  $\frac{\varepsilon}{12M} < 1$

Observamos que  $f$  es continua en  $[-1, -\frac{\varepsilon}{12M}]$  ( $[-1, -\frac{\varepsilon}{12M}] \subset [-1, 0)$ )

$\Rightarrow f$  es integrable sobre  $[-1, -\frac{\varepsilon}{12M}]$

$\Rightarrow$  Existe  $P' \in \mathcal{P}_{[-1, -\frac{\varepsilon}{12M}]}$  t. q.  $U(f, P') - L(f, P') < \frac{\varepsilon}{3}$

Similarmemente,  $f$  es integrable sobre  $[\frac{\varepsilon}{12M}, 1]$

$\Rightarrow$  existe  $P'' \in \mathcal{P}_{[\frac{\varepsilon}{12M}, 1]}$  t. q.  $U(f, P'') - L(f, P'') < \frac{\varepsilon}{3}$

Definimos  $P = P' \cup P'' \in \mathcal{P}_{[-1, 1]}$  y sean

$$m' = \inf \{ f(x) \mid x \in [-\frac{\varepsilon}{12M}, \frac{\varepsilon}{12M}] \} \quad \gamma$$

$$M' = \sup \{ f(x) \mid x \in [-\frac{\varepsilon}{12M}, \frac{\varepsilon}{12M}] \}$$

$$\Rightarrow -M \leq m' \quad \gamma \quad M' \leq M$$

$$\Rightarrow M' - m' \leq 2M$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) = [U(f, P') - L(f, P')] + [U(f, P'') - L(f, P'')]$$

$$+ (M' - m') \left( \frac{\varepsilon}{12M} - \left( -\frac{\varepsilon}{12M} \right) \right)$$

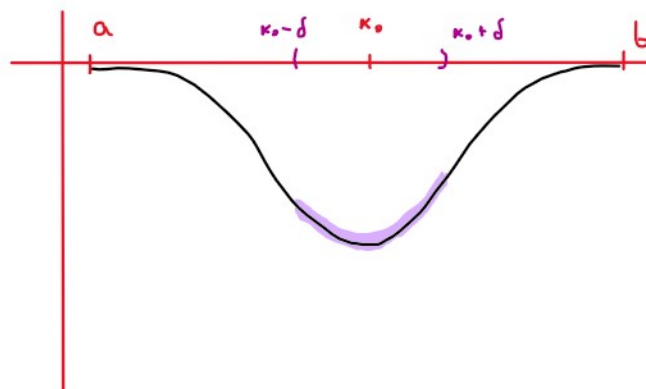
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + (2M) \left( \frac{\varepsilon}{6M} \right)$$

$$= \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

$\therefore f$  es integrable sobre  $[-1, 1]$

**Ejercicio.** Supón que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable sobre  $[a, b]$ ,  $f(x) \leq 0$  para cada  $x \in [a, b]$ ,  $f$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$  y  $f(x_0) < 0$ .  
Demuestra que  $\int_a^b f(x) dx < 0$



**Sol.** Ya que  $f$  es continua en  $x_0$  y  $f(x_0) < 0$ , existe  $\delta > 0$  t. q.  
si  $|x - x_0| < \delta$  entonces  $f(x) < 0$ .

Supongamos que  $x_0 \in (a, b)$  y  $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ . Sea

$$M = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \}.$$

Como  $f(x) \leq 0$  p. c.  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$\Rightarrow M \leq 0.$$

\* Si  $M < 0$ , definimos  $P = \{a, x_0 - \delta, x_0 + \delta, b\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ , y notemos

$$\text{que } M_{[a, x_0 - \delta]} = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, x_0 - \delta] \} \leq 0 \text{ y}$$

$$M_{[x_0 + \delta, b]} \leq 0$$

Ya que  $f$  es integrable, se sigue que

$$\int_a^b f \leq U(f, P) = M_{[a, x_0 - \delta]} ((x_0 - \delta) - a) + M((x_0 + \delta) - (x_0 - \delta)) \\ + M_{[x_0 + \delta, b]} (b - (x_0 + \delta))$$

$$\leq 0 + M(2\delta) + 0$$

$$M < 0$$

$$< 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f < 0$$

\* ¿Se puede asegurar que  $M < 0$ ?