

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

- $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- $c f$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b c f = c \int_a^b f$$

Lema. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, $\varepsilon > 0$, $K > 0$,
 $M = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$ y $m = \inf \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$

i) Si $\forall x, y \in [a, b] \mid f(x) - f(y) \mid \leq \varepsilon$, entonces $M - m \leq \varepsilon$

ii) Si $M - m < \varepsilon$, entonces $\forall x, y \in [a, b] \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon$

iii) Si $\forall x \in [a, b] \mid f(x) \mid \leq K$, entonces $M - m \leq 2K$.

Demostración

i) Sea $y \in [a, b]$ (cualquiera, pero fijo). Por hipótesis

$$\forall x \in [a, b] \mid f(x) - f(y) \mid \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon \leq f(x) - f(y) \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(y) + \varepsilon \quad \text{para toda } x \in [a, b]$$

$\Rightarrow f(y) + \varepsilon$ es cota superior de $\{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$

$$\Rightarrow M \leq f(y) + \varepsilon.$$

Luego, $M \leq f(y) + \varepsilon$ para toda $y \in [a, b]$.

$$\Rightarrow M - \varepsilon \leq f(y) \quad \text{para toda } y \in [a, b]$$

$\Rightarrow M - \varepsilon$ es cota inferior de $\{ f(y) \mid y \in [a, b] \}$

$$\Rightarrow M - \varepsilon \leq m \Rightarrow M - m \leq \varepsilon$$

$$\begin{array}{c} |a| < b \\ \updownarrow \\ -b < a < b \end{array}$$

Si α es cota superior de $A \Rightarrow \sup A \leq \alpha$
($\sup A$ es la mínima cota superior)

Si α es cota inferior de $A \Rightarrow \alpha \leq \inf A$
($\inf A$ es la máxima cota inferior)

ii) Sean $x, y \in [a, b]$.

$$\Rightarrow m \leq f(x) \leq M \quad y \quad m \leq f(y) \leq M$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} m \leq f(x) \leq M \\ -M \leq -f(y) \leq -m \end{array} \Rightarrow -(M-m) \leq f(x) - f(y) \leq M-m$$

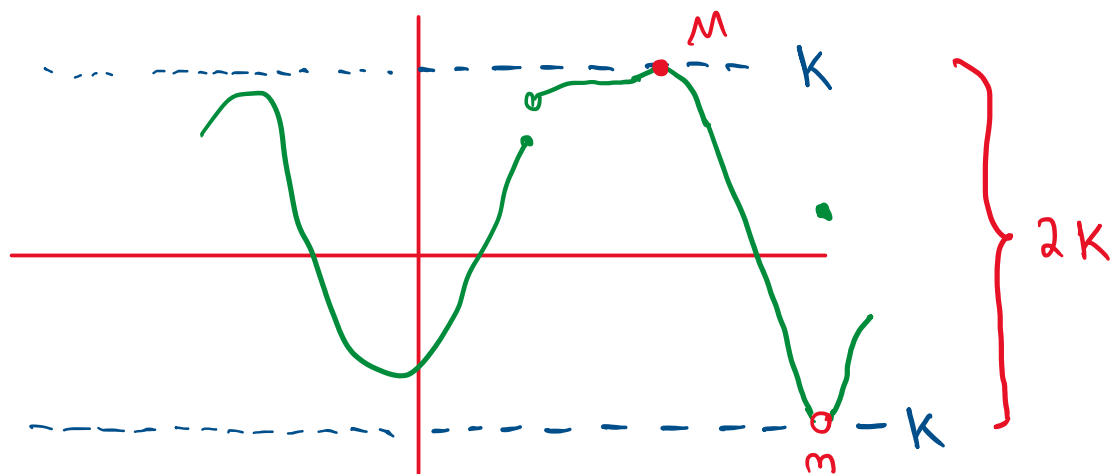
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M - m < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

iii) Sean $x, y \in [a, b]$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq K + K = 2K$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in [a, b] \quad |f(x) - f(y)| \leq 2K$$

$$\Rightarrow M - m \leq 2K.$$



Desigualdad del triángulo:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$$

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

Desigualdad del triángulo para la resta:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

Teorema. Sean $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $F([a, b]) \subseteq [c, d]$. Si F es integrable en $[a, b]$ y g es continua, entonces $g \circ F$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$.

Como g es continua en $[c, d]$, entonces g es uniformemente continua en $[c, d]$. Dado que $\frac{\varepsilon}{3(b-a)} > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in [c, d] \left(|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right). \quad (*)$$

Además, g está acotada en $[c, d]$ (por ser continua), así que existe $K > 0$ tal que

$$\forall x \in [c, d] \quad |g(x)| \leq K$$

Como F es integrable en $[a, b]$ y $\frac{\varepsilon \delta}{4K} > 0$, existe

$P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ tal que

$$U(F, P) - L(F, P) < \frac{\varepsilon \delta}{4K}. \quad (**)$$

Mostraremos que $U(g \circ F, P) - L(g \circ F, P) < \varepsilon$.

Sean

$$\begin{aligned} M_i &= \sup \{ F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} \\ m_i &= \inf \{ F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} \\ M'_i &= \sup \{ g(F(x)) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} \\ m'_i &= \inf \{ g(F(x)) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sean } A &= \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid M_i - m_i < \delta \} \quad y \\ B &= \{ i \in \{1, \dots, n\} \mid M_i - m_i \geq \delta \}. \end{aligned}$$

$$[a, b] \xrightarrow{F} [c, d] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{1, \dots, n\} = A \cup B \quad (\text{unión ajena})$$

$$\begin{aligned} U(g \circ F, P) - L(g \circ F, P) &= \sum_{i=1}^n (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \underbrace{\sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1})}_{\text{green}} + \underbrace{\sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1})}_{\text{yellow}}. \end{aligned}$$

• Si $i \in A \Rightarrow M_i - m_i < \delta$

Lema
(b) $\Rightarrow \forall x, y \in [t_{i-1}, t_i] \mid F(x) - F(y) < \delta$

continuidad
uniforme
de g $\rightarrow$ (*) $\Rightarrow \forall x, y \in [t_{i-1}, t_i] \mid g(F(x)) - g(F(y)) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

Lema
(a) $\Rightarrow M'_i - m'_i \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

$$\Rightarrow \sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i \in A} (t_i - t_{i-1})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}$$

• Si $i \in B \Rightarrow M_i - m_i > \delta. \Rightarrow \boxed{1 \leq \frac{M_i - m_i}{\delta}}$

Como $|g(x)| \leq K$ para toda $x \in [c, d]$, en particular
 $|g(f(x))| \leq K$ para toda $x \in [t_{i-1}, t_i]$.

^{Lema}
 $\Rightarrow_{(c)} M'_i - m'_i \leq 2K.$

$$\Rightarrow \sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq 2K \sum_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) = 2K \sum_{i \in B} 1 \cdot (t_i - t_{i-1})$$

$$\leq 2K \sum_{i \in B} \frac{M_i - m_i}{\delta} (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{2K}{\delta} \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\leq \frac{2K}{\delta} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \frac{2K}{\delta} (U(F, P) - L(F, P)) < \frac{2K}{\delta} \left(\frac{\varepsilon \delta}{4K} \right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow$

$$U(g \circ f, P) - L(g \circ f, P) = \underbrace{\sum_{i \in A} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1})}_{\text{green}} + \underbrace{\sum_{i \in B} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1})}_{\text{yellow}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore g \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

