

Más ejercicios con funciones integrables

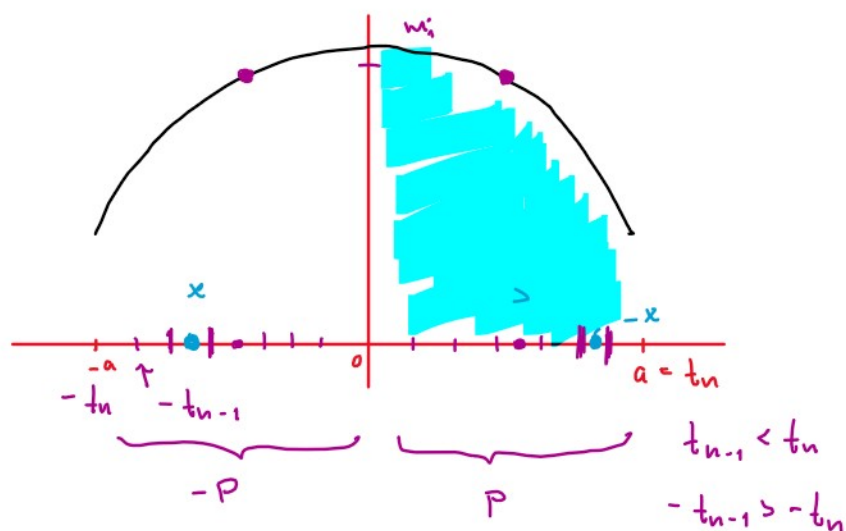
jueves, 24 de febrero de 2022

Ejercicio. Sean $a > 0$ y $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[-a, a]$.

Prueba que:

a) si f es par, entonces $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$

b) si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f = 0$.



$$-P = \{-p \mid p \in P\}$$

Sol. a) Como f es integrable sobre $[-a, a]$ y $0 \in [-a, a]$, entonces f es integrable sobre $[0, a]$.

$$\text{P.D. } L(f, P) \leq \frac{1}{2} \int_{-a}^a f \leq U(f, P) \quad \text{p.c. } P \in \mathcal{P}_{[0, a]}$$

Sea $P = \{t_0 = 0, \dots, t_n = a\} \in \mathcal{P}_{[0, a]}$ y definamos

$$Q = -P \cup P = \{-t_n = -a, -t_{n-1}, \dots, -t_0 = 0 = t_0, \dots, t_n = a\}$$

$$\Rightarrow Q \in \mathcal{P}_{[-a, a]}.$$

Notemos además que

$$x \in [-t_i, -t_{i-1}] \Leftrightarrow -t_i \leq x \leq -t_{i-1} \Leftrightarrow t_{i-1} \leq -x \leq t_i \Leftrightarrow -x \in [t_{i-1}, t_i]$$

Luego si $i \in \{1, \dots, n\}$ entonces

$$m_i' = \inf \{ \underline{f}(x) \mid x \in [-t_i, -t_{i-1}] \}$$

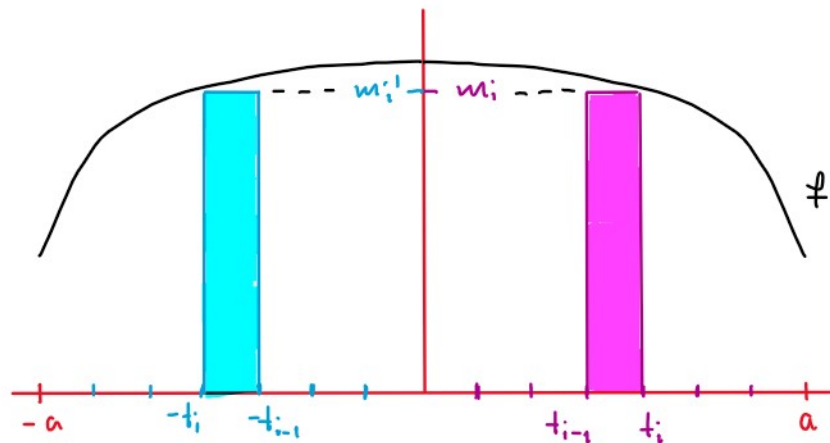
f es par

$$\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$$

$$= \inf \{ \underline{f}(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

$$= m_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(f, a) &= \sum_{i=1}^n \underline{m}_i' (-t_{i-1} - (-t_i)) + \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \underline{m}_i (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= 2 L(f, P). \end{aligned}$$



Similarmemente se prueba que

$$M_i' = \sup \{ f(x) \mid x \in [-t_i, -t_{i-1}] \} = M_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(f, a) &= \sum_{i=1}^n \underline{M}_i' (-t_{i-1} - (-t_i)) + \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= 2 U(f, P). \end{aligned}$$

Como f es integrable sobre $[-a, a]$, se sigue que

$$2 L(f, P) = L(f, Q) \leq \int_{-a}^a f \leq U(f, Q) = 2 U(f, P)$$

$$\Rightarrow 2 L(f, P) \leq \int_{-a}^a f \leq 2 U(f, P)$$

$$\Rightarrow L(f, P) \leq \frac{1}{2} \int_{-a}^a f \leq U(f, P) \quad \text{p. c. } P \in \mathcal{P}_{[a, a]}$$

Pero $\int_0^a f$ es el único número con esta propiedad

$$\Rightarrow \int_0^a f = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f$$

$$\therefore \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f.$$

b) Como f es integrable sobre $[-a, a]$ y $0 \in [-a, a]$, entonces f es integrable sobre $[a, a]$. Así, si $\varepsilon > 0$ entonces existe $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, a]}$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

Definimos $Q = \{-t_n = -a, -t_{n-1}, \dots, -t_0 = 0 = t_0, \dots, t_n = a\}$

$$\Rightarrow Q \in \mathcal{P}_{[-a, a]}.$$

Luego si $i \in \{1, \dots, n\}$ entonces

$$m_i' = \inf \{ \underline{f}(x) \mid x \in [-t_i, -t_{i-1}] \}$$

$$= \inf \{ \underline{-f(-x)} \mid -x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

$$= - \sup \{ f(-x) \mid -x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

$$= -M_i$$

$$f \text{ es impar} \Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$$

$$\inf(-A) = -\sup(A)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(f, Q) &= \sum_{i=1}^n \underline{m_i'} (-t_{i-1} - (-t_i)) + \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (-M_i) (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= - \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= -U(f, P) + L(f, P) \end{aligned}$$

Similarmemente se prueba que $M_i' = \sup \{ f(x) \mid x \in [-t_i, -t_{i-1}] \} = -m_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(f, Q) &= \sum_{i=1}^n \underline{M_i'} (-t_{i-1} - (-t_i)) + \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (-m_i) (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= - \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= -L(f, P) + U(f, P) \end{aligned}$$

Como f es integrable en $[-a, a]$, se sigue que

$$\underline{L(f, P) - U(f, P) = L(f, Q) \leq \int_{-a}^a f \leq U(f, Q) = U(f, P) - L(f, P)}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{-a}^a f \right| \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon > 0 \\ & \Rightarrow |b| \leq c \Leftrightarrow -c \leq b \leq c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \int_{-a}^a f \right| < \varepsilon \quad \text{p.c. } \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \left| \int_{-a}^a f \right| = 0$$

$$\therefore \int_{-a}^a f = 0$$

Ejercicio. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[a, b]$ tal que $\underline{f(x) \leq 0}$ p.c. $x \in [a, b]$. Prueba que $\int_a^b f \leq 0$.

Sol. Como $f(x) \leq 0$ p.c. $x \in [a, b]$

$$\Rightarrow -f(x) \geq 0 \quad \text{p.c. } x \in [a, b]$$

Ya que f es integrable en $[a, b]$, se sigue que $-f = (-1)f$ es integrable en $[a, b]$

$$\Rightarrow - \int_a^b f = \int_a^b -f \geq 0 \quad \rightarrow \text{ejercicio anterior}$$

$$\therefore \int_a^b f \leq 0$$

Ejercicio. Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables sobre $[a, b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ p.c. $x \in [a, b]$. Prueba que $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

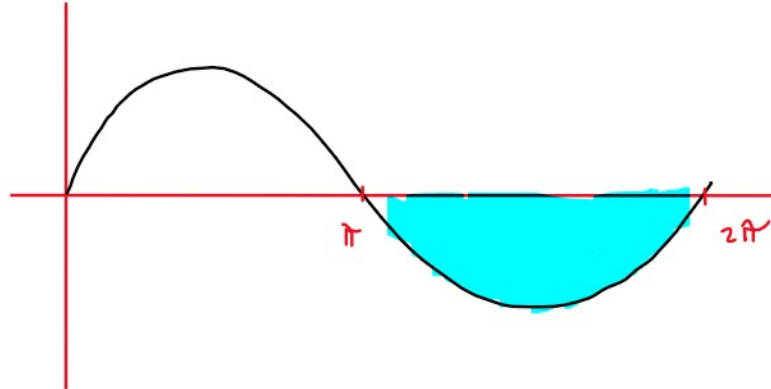
Sol. Definimos $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(x) = f(x) - g(x) \leq 0$

Notamos que $h(x) \leq 0$ p.c. $x \in [a, b]$ y h es integrable en $[a, b]$ por ser una suma de funciones integrables

$$\Rightarrow \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g) = \int_a^b h \leq 0$$

$$\therefore \int_a^b f \leq \int_a^b g \quad \square$$

Ejercicio. Demuestra que $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) dx < 0$



Como $\sin(x) \leq 0$ p.c. $x \in [\pi, 2\pi] \rightarrow \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) \leq 0$

P.D. $\exists P \in \mathcal{P}_{[\pi, 2\pi]} \left(\int_{\pi}^{2\pi} f \leq \underline{u(f, P)} < 0 \right)$