

Teorema. Si f es integrable en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f$$

Demostración.

- Si $c = 0 \Rightarrow cf \equiv 0 \Rightarrow cf$ es integrable (por ser constante) y

$$\int_a^b cf = \int_a^b 0 = 0(b-a) = 0 = 0 \int_a^b f = c \int_a^b f$$

- Supongamos que $c > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es integrable en $[a, b]$ y $\frac{\varepsilon}{c} > 0$, existe partición $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{c}$$

Sean

$$m'_i = \inf \{ c f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} \stackrel{c > 0}{=} c \cdot \inf \{ f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} = c \cdot m_i \quad (\text{porque } c > 0)$$

$$M'_i = \sup \{ c f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} = c \cdot M_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{U(cf, P)} &= \sum_{i=1}^n M'_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c M_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= c \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) = \underline{c \cdot U(f, P)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } L(cf, P) &= \sum_{i=1}^n m'_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= c \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = c \cdot L(f, P) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(\underline{cF}, P) - L(\underline{cF}, P) = c U(F, P) - c L(F, P)$$

$$= c [U(F, P) - L(F, P)] < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

$\therefore cF$ es integrable en $[a, b]$.

* Falta probar que $\int_a^b cF = c \int_a^b F$

Sabemos que para toda $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$

$$L(F, P) \leq \int_a^b F \leq U(F, P)$$

$$\Rightarrow \underline{L(cF, P)} = c L(F, P) \leq c \int_a^b F \leq c U(F, P) = \underline{U(cF, P)}$$

Como $\int_a^b cF$ es el único número que cumple que

$$L(cF, P) \leq \int_a^b cF \leq U(cF, P),$$

concluimos que

$$c \int_a^b F = \int_a^b cF$$

* El caso cuando $c < 0$ se deja como ejercicio.

Teorema. Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f+g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$.

Como f y g son integrables en $[a, b]$ y $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existen particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$ tales que

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y$$

$$U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $P_0 = P_1 \cup P_2 \Rightarrow P_0 \in \mathcal{P}_{[a, b]}$. Además, como $P_1 \leq P_0$ y $P_2 \leq P_0$

$$\Rightarrow U(f, P_0) - L(g, P_0) \leq U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y$$

$$U(g, P_0) - L(g, P_0) \leq U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} * \quad S, \quad P \leq Q &\Rightarrow L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P) \\ &\Rightarrow U(f, Q) - L(f, Q) \leq U(f, P) - L(f, P) \end{aligned}$$

• Si $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$, definimos

$$m_i' = \inf \{ f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

$$m_i'' = \inf \{ g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

$$m_i = \inf \{ f(x) + g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

$$M_i' = \sup \{ f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

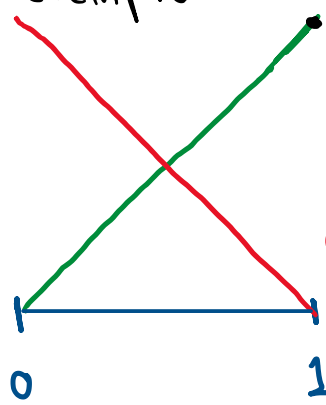
$$M_i'' = \sup \{ g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

$$y \quad M_i = \sup \{ f(x) + g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}.$$

¿ $m_i' + m_i'' = m_i$? No siempre

$$m_i' + m_i'' \leq m_i$$

$$0 \quad 0 \quad 1$$



$$F(x) = x$$

$$m_i' = 0$$

$$M_i' = 1$$

$$g(x) = 1 - x$$

$$m_i'' = 0$$

$$M_i'' = 1$$

$$(F+g)(x) = 1 \Rightarrow m_i = 1 = M_i$$

• Veamos que $m_i' + m_i'' \leq m_i$

Como para toda $x \in [t_{i-1}, t_i]$ se cumple que

$$m_i' \leq F(x)$$

$$y \quad m_i'' \leq g(x)$$

$$\Rightarrow m_i' + m_i'' \leq F(x) + g(x)$$

$\Rightarrow m_i' + m_i''$ es cota inferior de $\{F(x) + g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$

$\Rightarrow m_i' + m_i'' \leq m_i$. (el ínfimo es la máxima cota inferior)

Análogamente, $M_i' + M_i'' \geq M_i$. (ejercicio).

Luego,

$$m_i'(t_i - t_{i-1}) + m_i''(t_i - t_{i-1}) \leq m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m_i''(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow L(F, P) + L(g, P) \leq L(F+g, P)$$

y similarmente

$$U(F, P) + U(g, P) \geq U(F+g, P)$$

$$-L(F, P) - L(g, P) \geq -L(F+g, P)$$

$$\Rightarrow U(F+g, P) - L(F+g, P) \leq [U(F, P) - L(F, P)] + [U(g, P) - L(g, P)]$$

En particular,

$$U(F+g, P_0) - L(F+g, P_0) \leq [U(F, P_0) - L(F, P_0)] + [U(g, P_0) - L(g, P_0)]$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore F+g$ es integrable en $[a, b]$.

Falta probar que $\int_a^b F+g = \int_a^b F + \int_a^b g$

Observemos que

$$L(F, P_0) \leq \int_a^b F \leq U(F, P_0)$$

$$L(g, P_0) \leq \int_a^b g \leq U(g, P_0)$$

$$\Rightarrow L(F, P_0) + L(g, P_0) \leq \int_a^b F + \int_a^b g \leq U(F, P_0) + U(g, P_0)$$

$$\text{y } L(F, P_0) + L(g, P_0) \leq L(F+g, P_0) \leq \int_a^b F+g \leq U(F+g, P_0) \leq U(F, P_0) + U(g, P_0)$$

$$* \text{ Si } \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{matrix} \Rightarrow |x-y| \leq b-a$$

$$* \text{ Si } x, y \in [a, b] \Rightarrow |x-y| \leq b-a$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b F + \int_a^b g - \int_a^b F+g \right| \leq U(F, P_0) - L(F, P_0) + U(g, P_0) - L(g, P_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Como $\left| \int_a^b F + \int_a^b g - \int_a^b F+g \right| < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$,

concluimos que $\int_a^b F + \int_a^b g - \int_a^b F+g = 0$

$$\therefore \int_a^b F + \int_a^b g = \int_a^b F+g$$

Recordatorio:

Teorema Si F es acotada en $[a, b]$ y $c \in (a, b)$, entonces F es integrable en $[a, b] \Leftrightarrow F$ es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$.

Más aún,

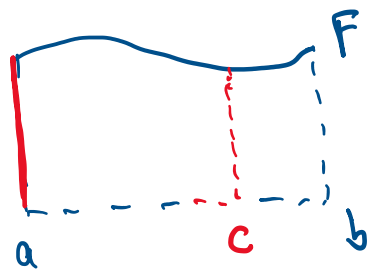
$$\int_a^b F = \int_a^c F + \int_c^b F$$

Hasta ahora se han estudiado las integrales en intervalos $[a, b]$ con $a < b$.

Definición. Sea F una función integrable en $[a, b]$. Definimos

$$\int_a^a F = 0$$

$$\text{y } \int_b^a F = - \int_a^b F$$



*Con esta definición se sigue cumpliendo que

$$\int_a^b F = \int_a^c F + \int_c^b F$$

$a < c < b$ (Teo.)

$a < b < c$

$b < a < c$

$b < c < a$

$c < a < b$

$c < b < a$

sin importar el orden de los números a, b y c .

Por ejemplo:

• Si $a=b$ $\Rightarrow \int_a^b F = 0$

$$\text{y } \int_a^c F + \int_c^b F = \int_b^c F + \int_c^b F = \int_b^c F - \int_b^c F = 0$$

(los casos de $a=c$ o $b=c$ son similares)

• Si $c < a < b$, por el teorema aplicado a $[c, b]$ y $a \in (c, b)$

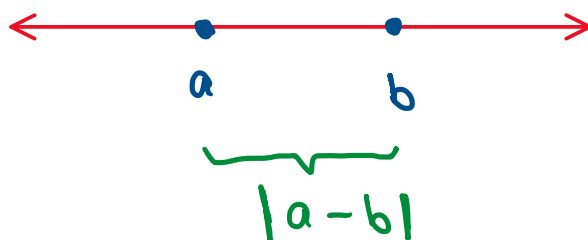
$$\int_c^b F = \int_c^a F + \int_a^b F$$

$$\Rightarrow \int_a^b F = \int_c^b F - \int_c^a F = \int_c^b F + \int_a^c F = \int_a^c F + \int_c^b F$$

Proposición. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

$$\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$



Demostración.

• Si $a \geq b \Rightarrow a-b \geq 0 \Rightarrow |a-b| = a-b$

$$\Rightarrow \frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a = \max\{a, b\}$$

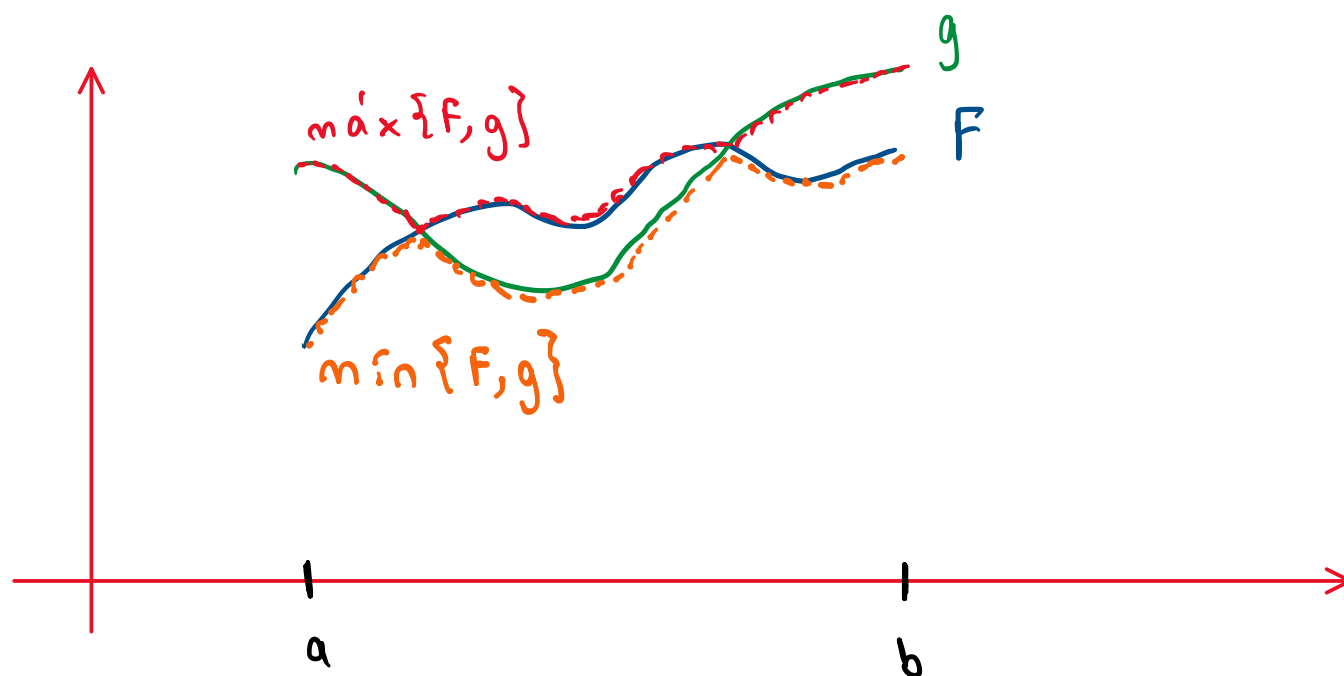
$$\text{y } \frac{a+b-|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{2b}{2} = b = \min\{a, b\}$$

El caso cuando $a \leq b$ es análogo.

Definición. Sean $F, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos las funciones $\max\{F, g\}$ y $\min\{F, g\}$ como

$$\max\{F, g\}(x) = \max\{F(x), g(x)\} \quad y$$

$$\min\{F, g\}(x) = \min\{F(x), g(x)\}$$



Nota:

$$\bullet \max\{F(x), g(x)\} = \frac{F(x) + g(x) + |F(x) - g(x)|}{2}$$

$$\bullet \min\{F(x), g(x)\} = \frac{F(x) + g(x) - |F(x) - g(x)|}{2}$$

- Si F y g son continuas, entonces $\max\{F, g\}$ y $\min\{F, g\}$ también son continuas