

Ejercicios de particiones y funciones integrables

martes, 22 de febrero de 2022

Ejercicio. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in [a, b]$. Prueba que $\int_a^b f > 0$.

Sol. Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$.

Notamos que $f(x) > 0$ p.c. $x \in [t_{i-1}, t_i]$

$\Rightarrow m_i > 0$ p.c. $i \in \{1, \dots, n\}$

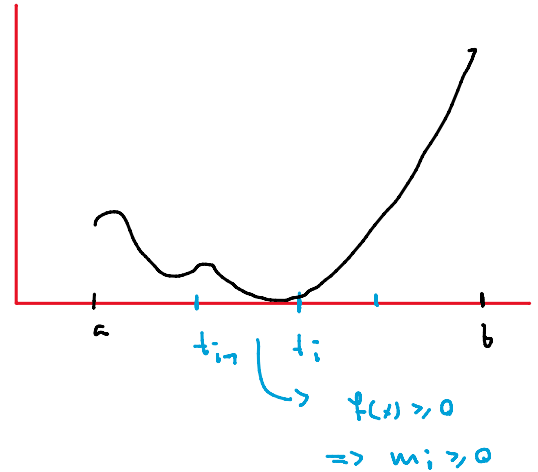
$\Rightarrow m_i(t_i - t_{i-1}) > 0$ p.c. $i \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) > 0$

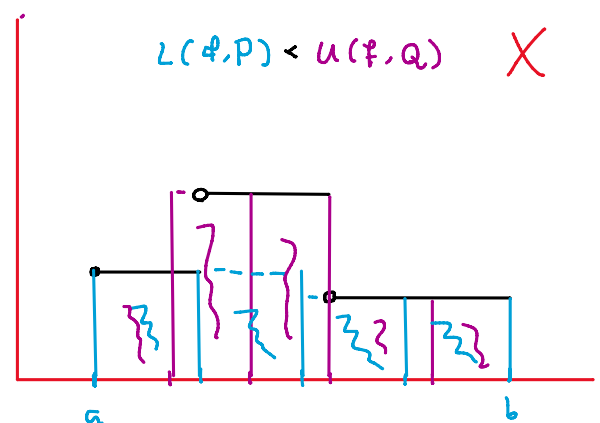
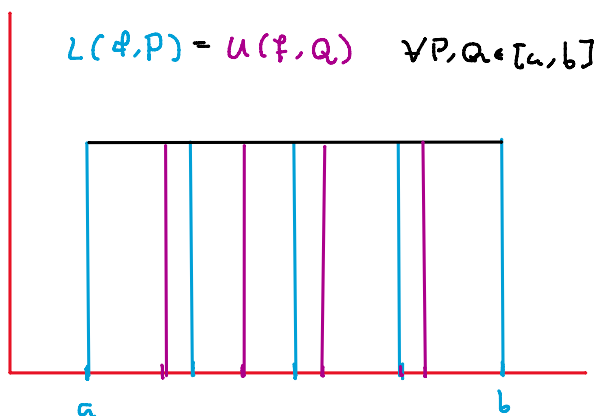
Como f es integrable en $[a, b]$, se sigue que

$\int_a^b f > L(f, P) > 0$

$\therefore \int_a^b f > 0$



Ejercicio. Determina que funciones tienen la propiedad de que toda suma superior es igual a toda suma inferior.



Sol. P.D. Solo las funciones constantes tienen esa propiedad

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisfase dicha propiedad, y sea $P = \{a, b\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$

$\Rightarrow m(b-a) = L(f, P) = U(f, P) = M(b-a) \quad (\text{hlp.})$

$\Rightarrow (M-m)(b-a) = M(b-a) - m(b-a) = 0$

Però $b-a > 0 \Rightarrow M-m=0$

$$\Rightarrow \inf \{f(x) \mid x \in [a,b]\} = m = M = \sup \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

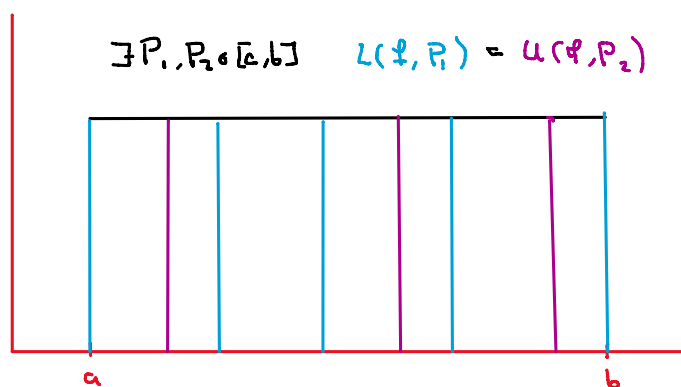
Además $m \leq f(x) \leq M$ p.c. $x \in [a,b]$

$$\Rightarrow f(x) = m (=M) \text{ para cada } x \in [a,b],$$

es decir, f es constante.

$\therefore$ Solo las funciones continuas tienen esta propiedad.

Ejercicio. Determina que funciones tienen la propiedad de que alguna suma superior es igual a alguna suma inferior distinta.



Sol. P.D. Solo las funciones constantes satisfacen esta propiedad.

Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisface dicha propiedad

Por hipótesis, existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ distintas tales que

$$\underline{L(f, P_1) = U(f, P_2)}$$

Sea $P = P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a,b] \Rightarrow P_1 \subset P \quad \vee \quad P_2 \subset P$

$$\Rightarrow \underline{L(f, P_1)} \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq \underline{U(f, P_2)}$$

$$\Rightarrow L(f, P) = U(f, P)$$

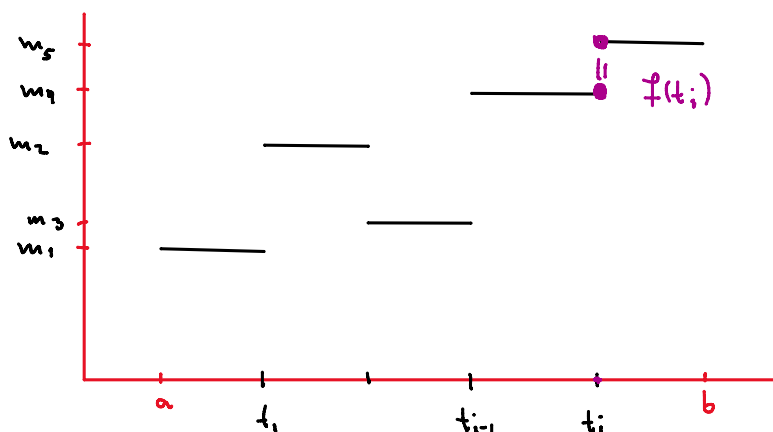
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) = U(f, P) - L(f, P) = 0$$

Però sabem que $t_i - t_{i-1} > 0$ y $M_i - m_i \geq 0$ p.c. $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow M_i - m_i = 0$$

$$\Rightarrow m_i = M_i = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = m_i (=M_i) \quad \text{p. c. } x \in [t_{i-1}, t_i] \quad \text{e } i \in \{1, \dots, n\}$$



Ahora bien, si $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\Rightarrow t_i \in [t_{i-1}, t_i] \quad \text{y} \quad t_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$\Rightarrow f(t_i) = m_i \quad \text{y} \quad f(t_i) = m_{i+1}$$

$$\Rightarrow m_i = m_{i+1} \quad \text{p. c. } i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f(x) = m_1 (=m_2 = \dots = m_n) \quad \text{p. c. } x \in [a, b],$$

es decir, f es una función constante.

$$a < 0$$

Ejercicio Sea $f: [a, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$. Calcula $\int_a^0 f$

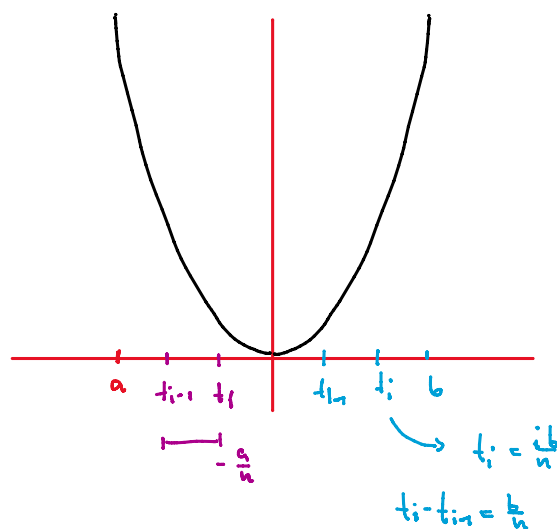
Sol. Notamos que f es integrable en $[a, 0]$

por ser continua en este intervalo

Sea $P_n \in \mathcal{P}[a, 0]$ tal que $P_n = \{t_0, \dots, t_n\}$

$$\text{y } t_i = \frac{(n-i)a}{n} \Rightarrow t_i - t_{i-1} = \frac{-a}{n} \quad -a > 0$$

$$\left(t_0 = \frac{(n-0)a}{n} = a, \dots, t_n = \frac{(n-n)a}{n} = 0 \right)$$



$$\Rightarrow U(f, P_n) = \sum_{i=1}^n \underline{M}_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \underline{f(t_{i-1})} \left(-\frac{a}{n}\right)$$

$$= \left(-\frac{a}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left[\frac{(n-(i-1))a}{n}\right]^2 = \left(-\frac{a^3}{n^3}\right) \sum_{i=1}^n (n+1-i)^2$$

$(\bullet) f$ es
decreciente
en $[a, 0]$

$$= \left(-\frac{a^3}{n^3}\right) \left[(n+1-1)^2 + (n+1-2)^2 + \dots + (n+1-n)^2 \right]$$

$$= \left(-\frac{a^3}{n^3}\right) \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = -\frac{a^3}{3} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right)$$

$$\gamma \quad L(f, P_n) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \left(-\frac{a}{n}\right)$$

$$= \left(-\frac{a}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left[\frac{(n-i)a}{n}\right]^2 = \left(-\frac{a^3}{n^3}\right) \sum_{i=1}^n (n-i)^2$$

$$= \left(-\frac{a^3}{n^3}\right) \left[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + (n-(n-1))^2 + (n-n)^2 \right]$$

$$= \left(-\frac{a^3}{n^3}\right) \left[\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} \right] = -\frac{a^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{a^3}{n^3} \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right) = L(f, P_n) \leq \int_a^0 f \leq U(f, P_n) = -\frac{a^3}{n^3} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right)$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \int_a^0 f = -\frac{a^3}{3} \quad (> 0)$$

Ejercicio. Si $a > 0$ y $f(x) = x^2$, calcular $\int_{-a}^a f$

S.l. Sabemos que f es integrable en $[-a, a]$ (por ser continua)

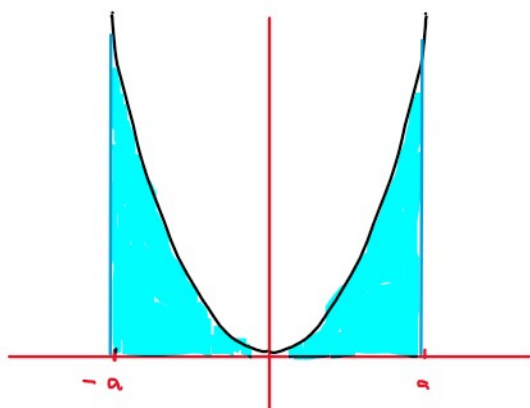
Como $a > 0$, entonces $-a < 0$ y así $0 \in [-a, a]$

$\Rightarrow f$ es integrable en $[-a, 0]$ y en $[0, a]$, y

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f \quad (\text{teorema visto en clase})$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f = -\frac{(-a)^3}{3} + \frac{a^3}{3} = -\left(-\frac{a^3}{3}\right) + \frac{a^3}{3} = \underline{\underline{2 \cdot \frac{a^3}{3}}}$$

$$\therefore \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f = \frac{2a^3}{3}$$



• ¿Qué tipo de funciones cumplen que $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$?

Afirmación: Las funciones pares ($f(x) = f(-x) \quad \forall x$)