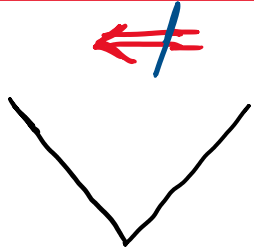


Teorema. Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

$$f \text{ derivable} \xRightarrow{\substack{\text{en} \\ x_0}} f \text{ continua} \xRightarrow{\substack{\text{en} \\ [a,b]}} f \text{ integrable}$$



$f(x) = |x|$
no es derivable
en $x_0 = 0$



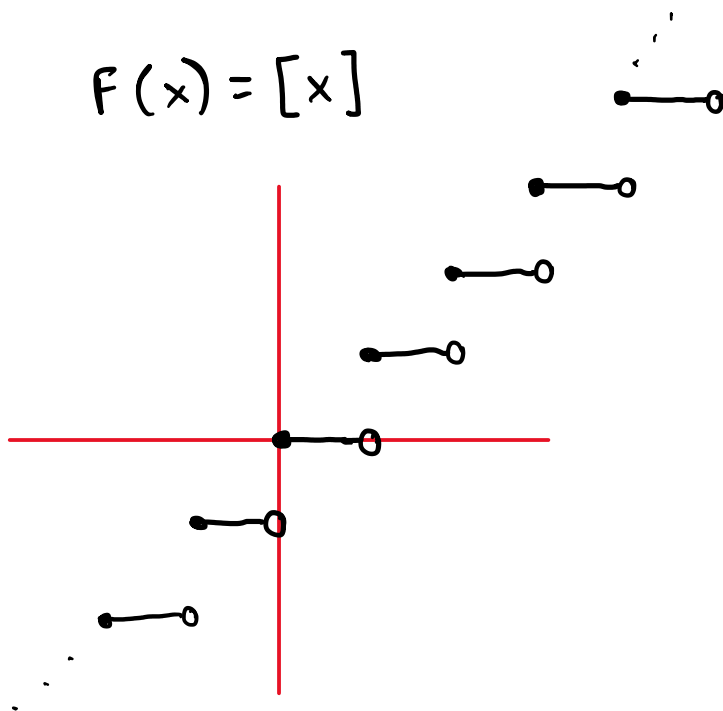
- Función de Thomae.
- Otro ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

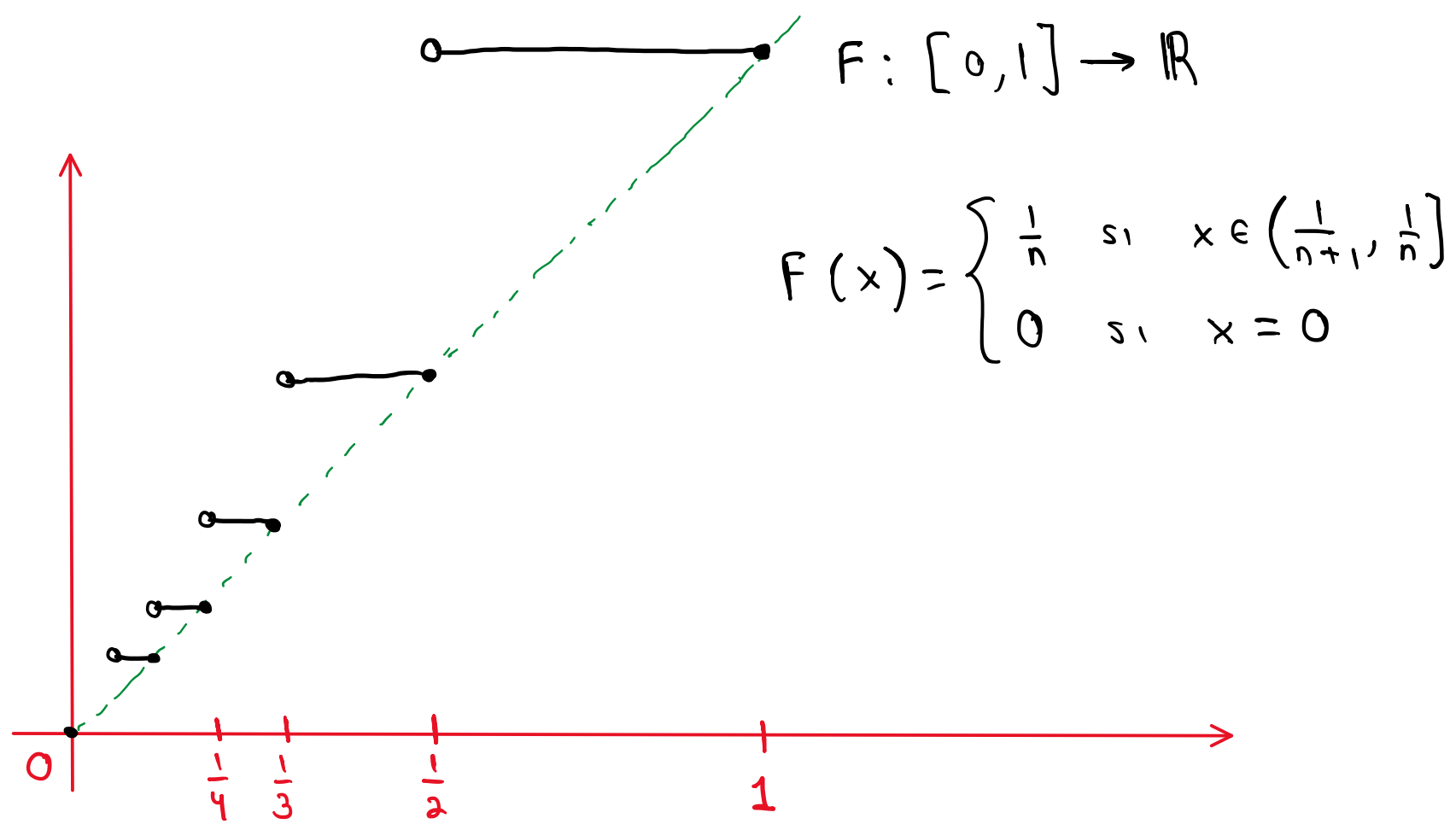
Teorema. Si f es monótona en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

• ¿Existe una función creciente con una infinidad de discontinuidades?

$$f(x) = [x]$$



• ¿Existe una función creciente con una infinidad de discontinuidades en un intervalo $[a, b]$?



* ¿Existe una función creciente que sea discontinua en todo punto?
(respuesta pendiente).

Teorema. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in (a, b)$.
Entonces F es integrable en $[a, b]$ si y solo si F es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$.

Además, si F es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b F = \int_a^c F + \int_c^b F.$$

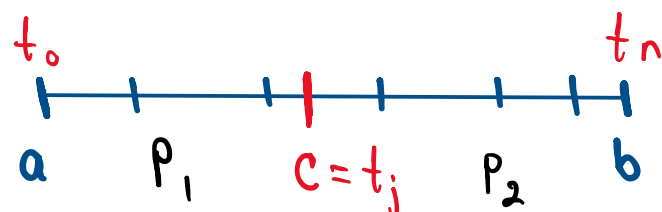
Demostración

$\Rightarrow$] Sea $\varepsilon > 0$. Como f es integrable en $[a, b]$, entonces existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Definimos

$$P_* = P \cup \{c\}$$



$\Rightarrow P_* \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ y $c \in P_*$. Además, como $P \subseteq P_*$, entonces

$$L(f, P) \leq \underline{L(f, P_*)} \leq U(f, P_*) \leq U(f, P)$$

$$\Rightarrow U(f, P_*) - L(f, P_*) \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon \quad (*)$$

Supongamos que $P_* = \{t_0, \dots, t_n\}$.

Como $c \in P_* \Rightarrow$ existe $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $c = t_j$.

Definimos $P_1 = \{t_0, \dots, t_j = c\}$ y $P_2 = \{c = t_j, \dots, t_n\}$

$\Rightarrow P_1 \in \mathcal{P}_{[a, c]}$ y $P_2 \in \mathcal{P}_{[c, b]}$. Además,

$$U(f, P_*) - L(f, P_*) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^j (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=j+1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \underbrace{[U(f, P_1) - L(f, P_1)]}_{0 \leq} + \underbrace{[U(f, P_2) - L(f, P_2)]}_{0 \leq} < \varepsilon \quad (*)$$

$$\Rightarrow U(f, P_1) - L(f, P_1) \leq \underbrace{[U(f, P_1) - L(f, P_1)]}_{0 \leq} + \underbrace{[U(f, P_2) - L(f, P_2)]}_{0 \leq} < \varepsilon$$

$$y \quad \mathcal{U}(F, P_2) - L(F, P_2) \leq \underbrace{[\mathcal{U}(F, P_1) - L(F, P_1)]} + \underbrace{[\mathcal{U}(F, P_2) - L(F, P_2)]} < \varepsilon$$

$\therefore F$ es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$.

Más aún, como

$$L(F, P_1) \leq \int_a^c F \leq \mathcal{U}(F, P_1) \quad (\text{porque } P_1 \in \mathcal{P}_{[a, c]})$$

$$L(F, P_2) \leq \int_c^b F \leq \mathcal{U}(F, P_2) \quad (\text{porque } P_2 \in \mathcal{P}_{[c, b]})$$

$$\Rightarrow L(F, P_*) = L(F, P_1) + L(F, P_2) \leq \int_a^c F + \int_c^b F \leq \mathcal{U}(F, P_1) + \mathcal{U}(F, P_2) = \mathcal{U}(F, P_*)$$

$$\Rightarrow L(F, P_*) \leq \underbrace{\int_a^c F + \int_c^b F} \leq \mathcal{U}(F, P_*) \quad y$$

$$L(F, P_*) \leq \underbrace{\int_a^b F} \leq \mathcal{U}(F, P_*) \quad (\text{porque } P_* \in \mathcal{P}_{[a, b]})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left| \int_a^b F - \left(\int_a^c F + \int_c^b F \right) \right|} \leq \mathcal{U}(F, P_*) - L(F, P_*) < \varepsilon$$

para toda $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \int_a^b F - \left(\int_a^c F + \int_c^b F \right) = 0 \quad \therefore \int_a^b F = \int_a^c F + \int_c^b F.$$



$$\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{array} \Rightarrow |x - y| \leq b - a$$

Dem.

$$\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ -b \leq -y \leq -a \end{array} \Rightarrow -(b-a) \leq x-y \leq b-a \\ \Rightarrow |x-y| \leq b-a.$$

$\Leftarrow$] Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y F es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces existen particiones P_1 de $[a, c]$ y P_2 de $[c, b]$ tales que

$$U(F, P_1) - L(F, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y$$

$$U(F, P_2) - L(F, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $P = P_1 \cup P_2 \Rightarrow P$ es partición de $[a, b]$ y $c \in P$ (porque $c \in P_1$ y $c \in P_2$).

Supongamos que $P = \{t_0, \dots, t_n\} \Rightarrow$ existe $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $t_j = c$.

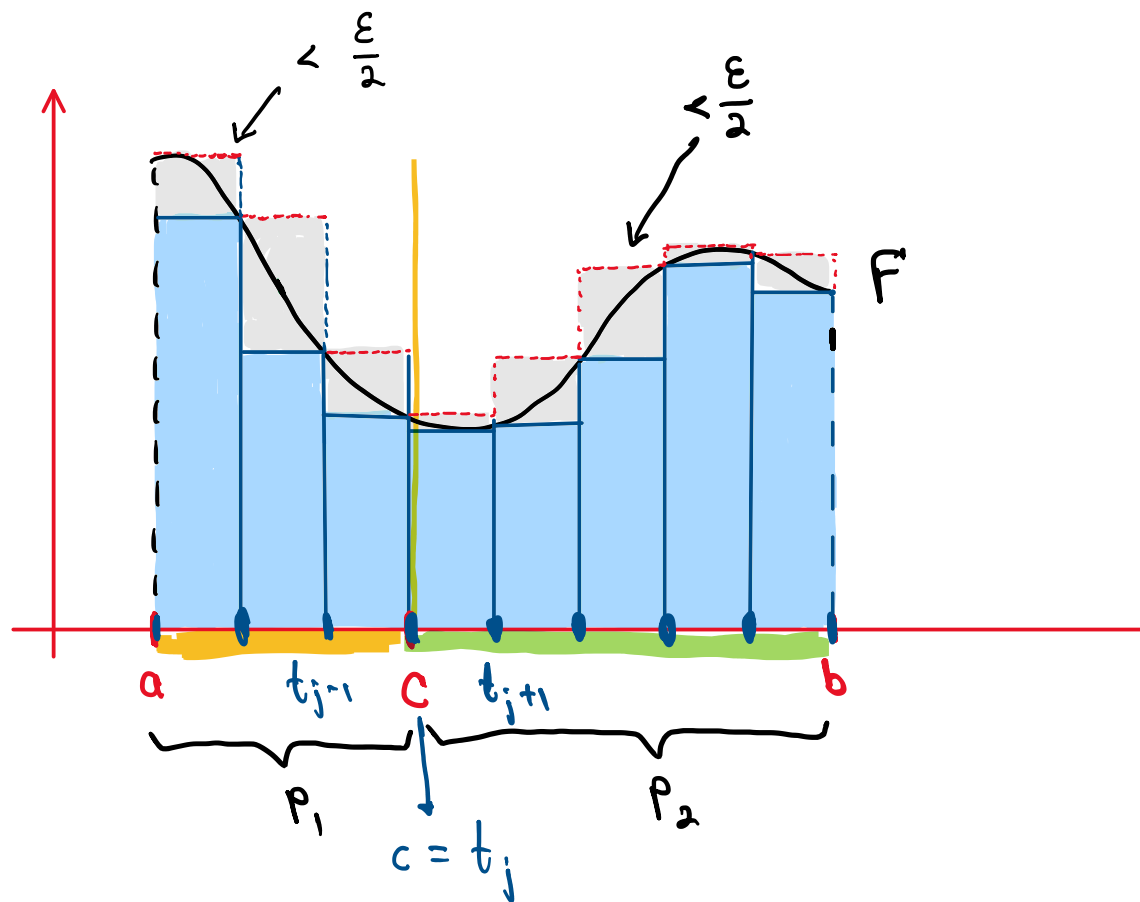
$$\Rightarrow U(F, P) - L(F, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^j (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=j+1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= [U(F, P_1) - L(F, P_1)] + [U(F, P_2) - L(F, P_2)]$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore F$ es integrable en $[a, b]$.



Teorema. Si F es integrable en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces cF es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b cF = c \int_a^b F$$

Demostración.

- Si $c = 0 \Rightarrow cF \equiv 0 \Rightarrow cF$ es integrable (por ser constante) y

$$\int_a^b cF = \int_a^b 0 = 0(b-a) = 0 = 0 \int_a^b F = c \int_a^b F$$

- Supongamos que $c > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como F es integrable en $[a, b]$ y $\frac{\varepsilon}{c} > 0$, existe partición $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ tal que

$$U(F, P) - L(F, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{c}$$

Sean

$$m_i' = \inf \{ c F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} = c \cdot \inf \{ F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} \\ = c \cdot m_i \quad (\text{porque } c > 0)$$

$$M_i' = \sup \{ c F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} = c \cdot M_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(\underline{cF}, P) - L(\underline{cF}, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i' - m_i') (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (cM_i - cm_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &= c \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1}) \\ &< c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore cF$ es integrable en $[a, b]$.

* Falta probar que $\int_a^b cF = c \int_a^b F$

• El caso cuando $c < 0$ se deja como ejercicio.