

Definición. Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua (en A) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A \quad (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Observación: f continua en A $\nRightarrow$ f uniformemente continua en A

Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{1}{x}$

Teorema. Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Observación. Si $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$, entonces

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n \underline{M}_i (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \underline{m}_i (t_i - t_{i-1})$$

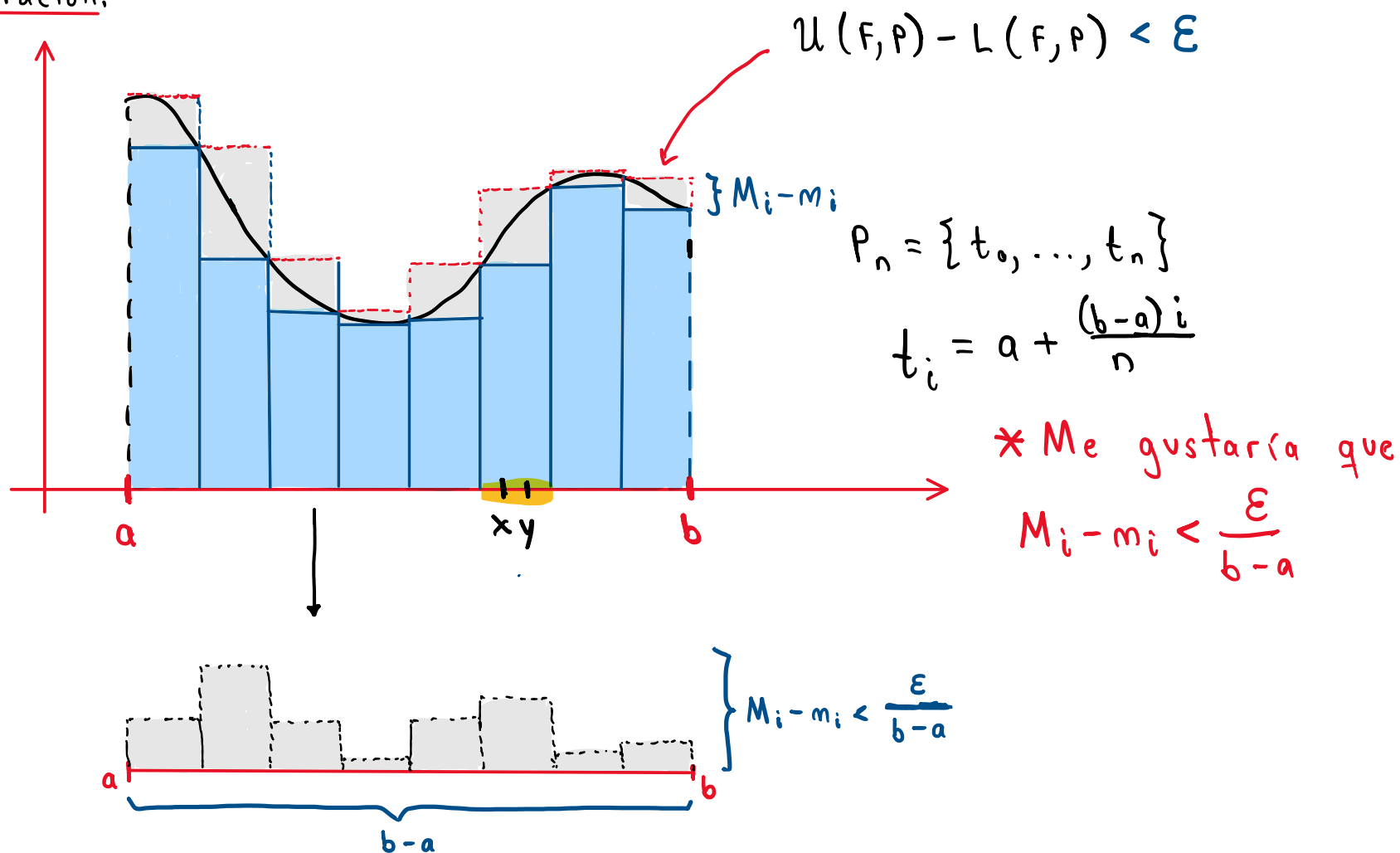
$$= M_1 (t_1 - t_0) + \dots + M_n (t_n - t_{n-1}) - [m_1 (t_1 - t_0) + \dots + m_n (t_n - t_{n-1})]$$

$$= (M_1 - m_1) (t_1 - t_0) + \dots + (M_n - m_n) (t_n - t_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (t_i - t_{i-1})$$

Teorema. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Demostración.



Sea $\epsilon > 0$.

Como f es continua $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$. Luego, dado que $\frac{\epsilon}{b-a} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in [a, b] \quad (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}). \quad (*)$$

* Queremos que los subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ tengan longitud menor que δ , es decir, que $\frac{b-a}{n} < \delta$.

Como $\frac{\delta}{b-a} > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{\delta}{b-a} \Rightarrow \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Definimos ahora $P_n = \{t_0, \dots, t_n\}$, donde

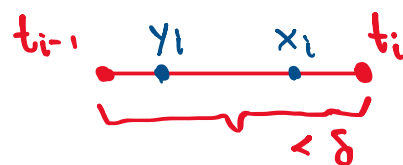
$$t_i = a + \frac{(b-a)i}{n} \Rightarrow t_i - t_{i-1} = a + \frac{(b-a)i}{n} - \left[a + \frac{(b-a)(i-1)}{n} \right]$$

$$t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$$

Por otra parte, como f es continua en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, existen $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\forall x \in [t_{i-1}, t_i] \quad f(x_i) \leq f(x) \leq f(y_i)$$

(f alcanza su valor mínimo y máximo en $[t_{i-1}, t_i]$.)



$$\Rightarrow m_i = f(x_i) \quad y \quad M_i = f(y_i).$$

$$\odot \quad \text{Si } x, y \in [a, b] \Rightarrow |x - y| \leq b - a.$$

Además, como $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i] \Rightarrow |x_i - y_i| \leq t_i - t_{i-1} < \delta$

$$\Rightarrow (*) \quad M_i - m_i = |m_i - M_i| = |f(x_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

$$< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \left(\frac{b-a}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{n} (n) = \varepsilon$$

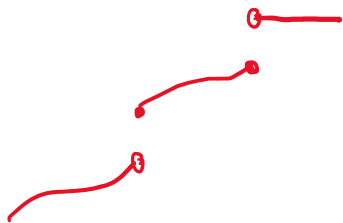
$$\odot \quad \sum_{i=1}^n c = \overset{i=1}{\downarrow} c + \overset{i=2}{\downarrow} c + \dots + \overset{i=n}{\downarrow} c = nc$$

$$\Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$$

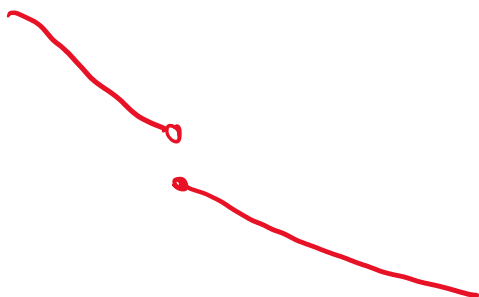
$\therefore f$ es integrable en $[a, b]$.

Definición. Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es:

• creciente (en A) si $\forall x, y \in A \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.



• decreciente (en A) si $\forall x, y \in A \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$.



• monótona en A si f es creciente en A o f es decreciente en A .

Teorema. Si f es monótona en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Demostración.

Supongamos que f es creciente en $[a, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Si f es constante $\Rightarrow f$ es integrable en $[a, b]$

(demostrado previamente).

Si f no es constante, como f es creciente $\Rightarrow f(a) < f(b)$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{(b-a)(f(b)-f(a))} > 0.$$

Por la P.A., existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{(b-a)(f(b)-f(a))}$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{n} [f(b)-f(a)] < \varepsilon.$$

Definimos ahora $P_n = \{t_0, \dots, t_n\}$, donde

$$t_i = a + \frac{(b-a)i}{n} \Rightarrow t_i - t_{i-1} = \cancel{a} + \frac{(b-a)i}{n} - \left[\cancel{a} + \frac{(b-a)(i-1)}{n} \right]$$
$$t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Como F es creciente $\Rightarrow \forall x \in [t_{i-1}, t_i] \quad F(t_{i-1}) \leq F(x) \leq F(t_i)$
 $\Rightarrow m_i = F(t_{i-1}) \quad y \quad M_i = F(t_i)$

$$\Rightarrow U(F, P_n) - L(F, P_n) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^n [F(t_i) - F(t_{i-1})] \left[\frac{b-a}{n} \right]$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n [F(t_i) - F(t_{i-1})]$$

$$= \frac{b-a}{n} [F(t_n) - F(t_0)]$$

$$= \frac{b-a}{n} [F(b) - F(a)] < \varepsilon$$

Suma telescópica:

$$\begin{aligned} & \cancel{F(t_1)} - F(t_0) \\ & + F(t_2) - \cancel{F(t_1)} \\ & + \dots \\ & + F(t_n) - \cancel{F(t_{n-1})} \end{aligned}$$

$\therefore F$ es integrable en $[a, b]$.

El caso en el que F es decreciente se deja como ejercicio.

$$U(F, P_n) - L(F, P_n)$$

