Más ejemplos de funciones integrables

jueves, 17 de febrero de 2022

Teorema (criterio de integrabilidad)

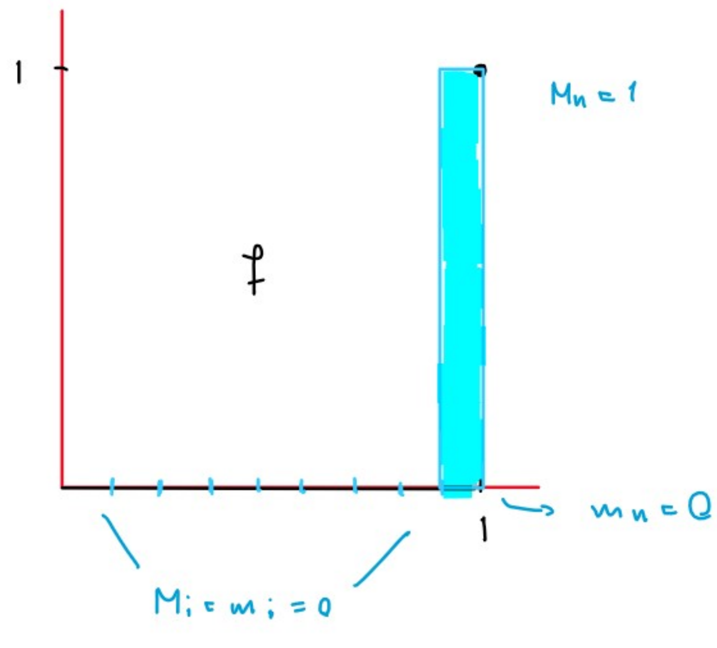
Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$ si y solo si para todo $\varepsilon>0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

Ejemplos

5. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$



Veamos que f es integrable sobre $[0,1]$.

Sea $\varepsilon>0$ y $n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}<\varepsilon$ (propiedad Arquimediana)

Consideremos $P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\}$ $\Rightarrow$ $P_n\in\mathcal{P}_{[0,1]}$

- Si $i\in\{1,\dots,n-1\}$ y $x\in[t_{i-1},t_i]$

$\Rightarrow$ $f(x)=0$

Además existe $x \in [t_{n-1}, t_n]$ t.q. $f(x) = 0$

$$\Rightarrow m_i = 0 \quad \text{p.a } i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \cancel{m_i}^{0}(t_i - t_{i-1}) = 0$$

~ Luego, $M_i = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $M_n = 1$

$$\Rightarrow U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} M_i$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \cancel{M_i}^{0} + \cancel{M_n}^{1}\right) = \frac{1}{n}(0+1) = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow U(f, P_n) - \cancel{L(f, P_n)}^{0} < \varepsilon$$

$$\therefore f \text{ es integrable sobre } [0,1]$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $P_n \in \mathcal{P}_{[0,1]}$ tal que

$$0 = L(f, P_n) \leq \int_0^1 f \leq U(f, P_n) = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 f \leq \frac{1}{n}$$

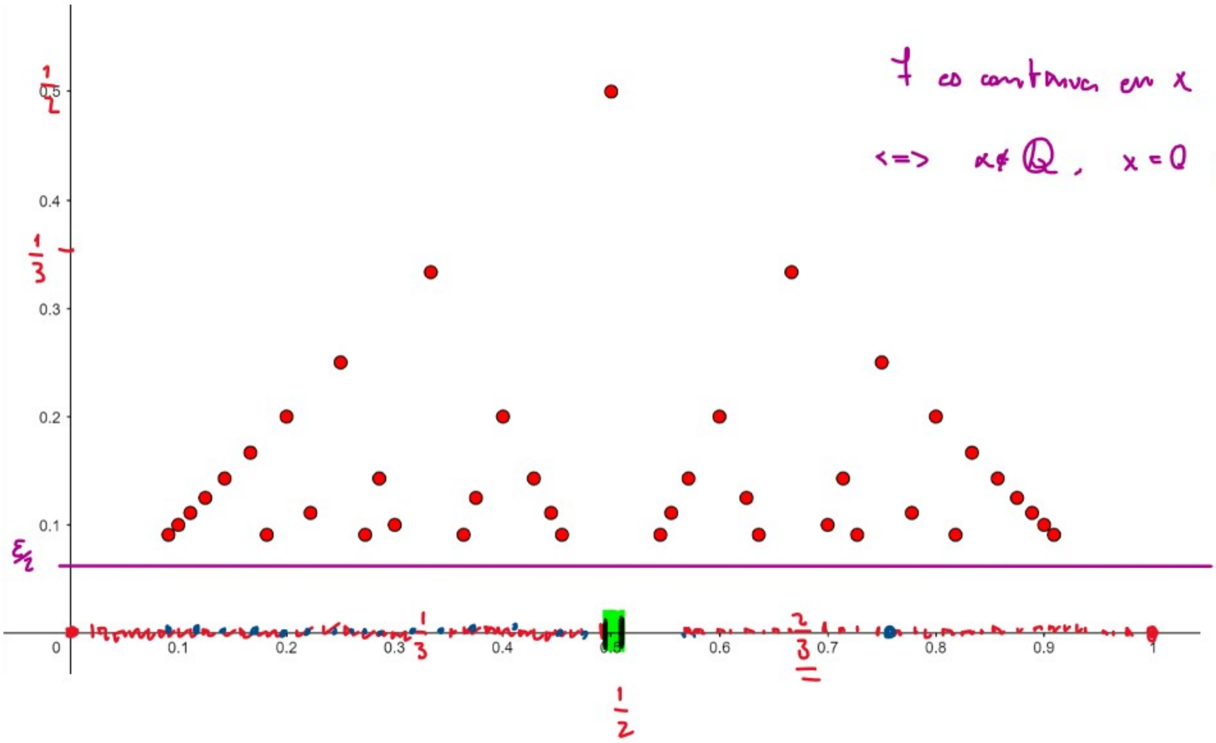
tomando límite cuando $n \to \infty$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 f \leq 0$$

$$\therefore \int_0^1 f = 0$$

6. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q},\ x = 0 \text{ o } x = 1 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ es irreducible y } p, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$



f es continua en x $\iff$ $x \notin \mathbb{Q}$, $x = 0$ y $x = 1$

Veamos que f es integrable.

Sea $\varepsilon > 0$. y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{N} \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Consideremos $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N} \right\}$,

es decir,

$$A = \left\{ x \in [0,1] \;\middle|\; x = \frac{p}{q} \text{ y } \frac{1}{q} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

- Si $x \in A$ $\Rightarrow$ $f(x) \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{N} \right\}$

  $\Rightarrow$ $f(x) \leq 1$ $\quad (M_i \leq 1)$

- Si $x \notin A$ $\Rightarrow$ $f(x) \leq \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad (M_i < \frac{\varepsilon}{2})$

Notamos que A es finito. Sea $k = |A|$ (A tiene k elementos)

y sea $n > k$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4k}$

Tomemos $P_n \in \mathcal{P}_{[0,1]}$ tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}$ p.c. $i \in \{1, \dots, n\}$

- $L(f, P_n)$

Por densidad de los irracionales sabemos que $\underline{[t_{i-1}, t_i]} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ existe $x \in [t_{i-1}, t_i]$ t.q. $f(x) = 0$ $(x \notin \mathbb{Q})$

$\Rightarrow$ $m_i = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \cancel{m_i}^{0} (t_i - t_{i-1}) = 0$$

- $U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$

$$= \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A = \emptyset} M_i (t_i - t_{i-1}) + \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A \neq \emptyset} M_i (t_i - t_{i-1})$$

~ Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $[t_{i-1}, t_i] \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow$ $f(x) \leq \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ p.c. $x \in [t_{i-1}, t_i]$

$\Rightarrow$ $M_i \leq \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ p.c. i t.q. $[t_{i-1}, t_i] \cap A = \emptyset$

$$\Rightarrow \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A = \emptyset} M_i (t_i - t_{i-1}) < \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A = \emptyset} \frac{\varepsilon}{2} (t_i - t_{i-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A = \emptyset} (t_i - t_{i-1})$$

la cantidad de intervalos que no intersecan a A está acotada por los intervalos totales de la partición

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}_{}$$

suma telescópica

$$= \frac{\varepsilon}{2} (1 - 0)$$

$$\Rightarrow \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A = \emptyset} M_i (t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$[t_{i-1}, t_i] \cap A = \emptyset$

~ Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ t.q $[t_{i-1}, t_i] \cap A \neq \emptyset$

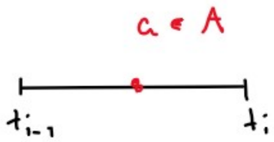
$\Rightarrow$ existe $x \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $f(x) \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{N}\}$

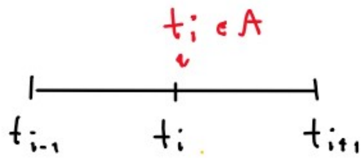
$\Rightarrow$ $f(x) \leq 1$ p.c. $x \in [t_{i-1}, t_i]$

$\Rightarrow$ $\boxed{M_i \leq 1}$

¿Cuántos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ intersecan a A?

- A tiene k elementos





$\Rightarrow$ A interseca a lo más a $2k$ intervalos de P.

$$\Rightarrow \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A \neq \emptyset} M_i (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A \neq \emptyset} 1 \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4k}}$$

$$< \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A \neq \emptyset} \frac{\varepsilon}{4k}$$

$$= \frac{\varepsilon}{4k} \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A \neq \emptyset} 1$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4k} \sum_{j=1}^{2k} 1$$

$$= \frac{\varepsilon}{4k} (2k) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{[t_{i-1}, t_i] \cap A \neq \emptyset} M_i (t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \; U(f, P_n) - \cancel{L(f, P_n)}^{0} = U(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore$ f es integrable en $[0,1]$.

Valor de $\int_0^1 f$.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya vimos que existe $P \in \mathcal{P}[0,1]$ t.q.

$$0 = L(f,P) \leq \int_0^1 f \leq U(f,P) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 f < \varepsilon \qquad \text{p.c. } \varepsilon > 0$$

$$\therefore \int_0^1 f = 0$$