

Definición. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos

- la integral inferior de F en $[a, b]$ como

$$\underline{\int_a^b} F = \sup \{ L(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b] \}$$

- la integral superior de F en $[a, b]$ como

$$\overline{\int_a^b} F = \inf \{ U(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b] \}$$

Diremos que F es integrable en $[a, b]$ si:

$$\underline{\int_a^b} F = \overline{\int_a^b} F,$$

es decir, si

$$\sup \{ L(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b] \} = \inf \{ U(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b] \}.$$

En este caso, a este número común se le denomina la integral de F en $[a, b]$ y se representa como

$$\int_a^b F.$$

- Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es constante, con $F(x) = c$ para toda $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b F = c(b-a)$$

Otra notación que utilizaremos en lugar de $\int_a^b F$ es $\int_a^b f(x) dx$.

Con esta notación,

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

$$\int_a^b c dy = c(b-a)$$

dx indica con respecto a qué variable se integra.

Teorema (criterio de integrabilidad).

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces f es integrable en $[a, b]$ si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

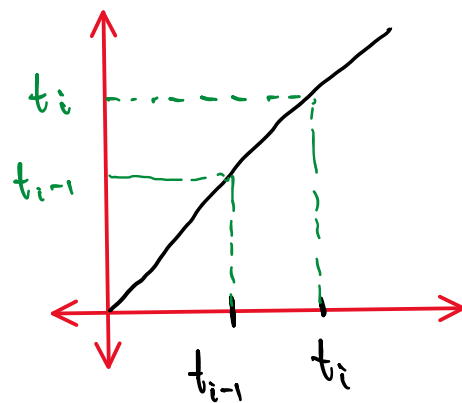
Ejemplos:

③ Sea $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$

Sea $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$

$$\Rightarrow U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1})$$

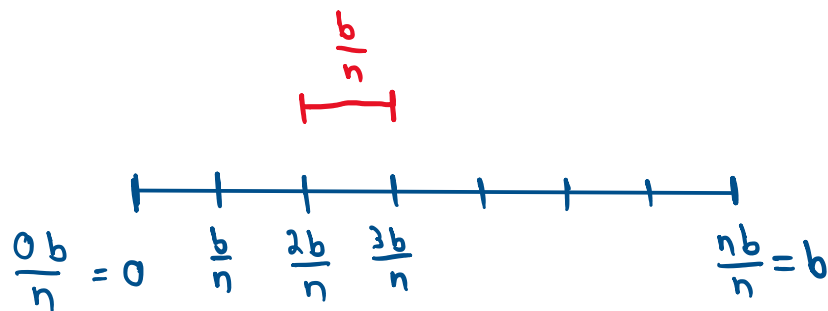
$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n t_i (t_i - t_{i-1}) = t_1(t_1 - t_0) + t_2(t_2 - t_1) + \dots + t_n(t_n - t_{n-1}) \\ &= t_1^2 - t_0 t_1 + t_2^2 - t_1 t_2 + \dots + t_n^2 - t_{n-1} t_n \end{aligned}$$



Para simplificar la suma anterior, consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la partición $P_n = \{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}, b\}$,

es decir, $t_i = \frac{ib}{n}$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

$$\Rightarrow t_i - t_{i-1} = \frac{ib}{n} - \frac{(i-1)b}{n} = \frac{b}{n}$$



$$\Rightarrow U(f, P_n) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{ib}{n} \left(\frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^n i \left(\frac{b^2}{n^2} \right)$$

$$= \frac{b^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{b^2}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{b^2}{2} \left[\frac{n(n+1)}{n^2} \right] = \frac{b^2}{2} \left[1 + \frac{1}{n} \right]$$

$$L(F, P_n) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)b}{n} \left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^n (i-1) \frac{b^2}{n^2}$$

$$= \frac{b^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{b^2}{n^2} \left[\frac{n(n-1)}{2} \right] = \frac{b^2}{2} \left[\frac{n(n-1)}{n^2} \right] = \frac{b^2}{2} \left[1 - \frac{1}{n} \right]$$

$$\Rightarrow U(F, P_n) - L(F, P_n) = \frac{b^2}{2} \left[1 + \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{b^2}{2} \left[\frac{2}{n} \right] = \frac{b^2}{n} < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\frac{\varepsilon}{b^2} > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{b^2} \Rightarrow \frac{b^2}{n} < \varepsilon$

$$\Rightarrow U(F, P_n) - L(F, P_n) = \frac{b^2}{n} < \varepsilon.$$

$\therefore F$ es integrable en $[0, b]$.

* Faltaba calcular $\int_0^b F$

Como F es integrable, tenemos que $L(F, P) \leq \int_0^b F \leq U(F, P)$ para toda $P \in \mathcal{P}_{[0, b]}$.
En particular,

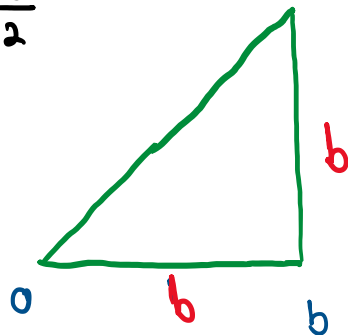
$$L(F, P_n) \leq \int_0^b F \leq U(F, P_n)$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{2} \left[1 - \frac{1}{n} \right] \leq \int_0^b F \leq \frac{b^2}{2} \left[1 + \frac{1}{n} \right] \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{b^2}{2} [1 - 0] \leq \int_0^b F \leq \frac{b^2}{2} [1 + 0] \Rightarrow \int_0^b F = \frac{b^2}{2}$$

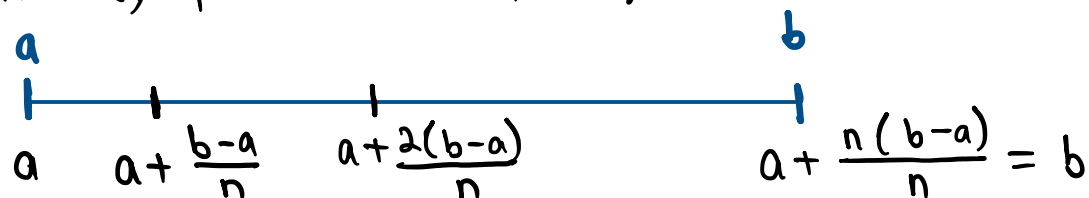
$$\therefore \boxed{\int_0^b x \, dx = \frac{b^2}{2}}$$



* Nota: Si queremos calcular $\int_a^b x dx$, podemos considerar

$$P_n = \{t_0, \dots, t_n\}, \text{ donde } t_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

(los cálculos son similares, pero más extensos).



* Si $a_n \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergen $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(Teorema de compresión).

* Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, entonces $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

$$* \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

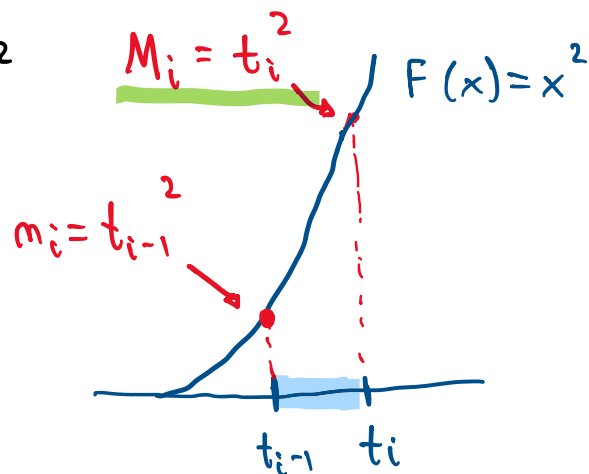
$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

④ Sea $F: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = x^2$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$P_n = \{t_0, \dots, t_n\}, \text{ donde } t_i = \frac{ib}{n}$$

$$\Rightarrow t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow U(F, P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n} \right)^2 \left(\frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2 b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{b^3}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{b^3}{3} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2n^3} \right] \\
 &= \frac{b^3}{3} \left[1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L(F, P_n) &= \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(i-1)b}{n} \right]^2 \left(\frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2 b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{b^3}{n^3} \left[\frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} \right] = \frac{b^3}{3} \left[\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{2n^3} \right] \\
 &= \frac{b^3}{3} \left[1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow U(F, P_n) - L(F, P_n) &= \frac{b^3}{3} \left[\cancel{1} + \frac{3}{2n} + \cancel{\frac{1}{2n^2}} - \left(\cancel{1} - \frac{3}{2n} + \cancel{\frac{1}{2n^2}} \right) \right] = \frac{b^3}{3} \left[\frac{6}{2n} \right] \\
 &= \frac{b^3}{n} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la P.A. (propiedad arquimediana), existe $n \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{b^3} \Rightarrow U(F, P_n) - L(F, P_n) = \frac{b^3}{n} < \varepsilon$$

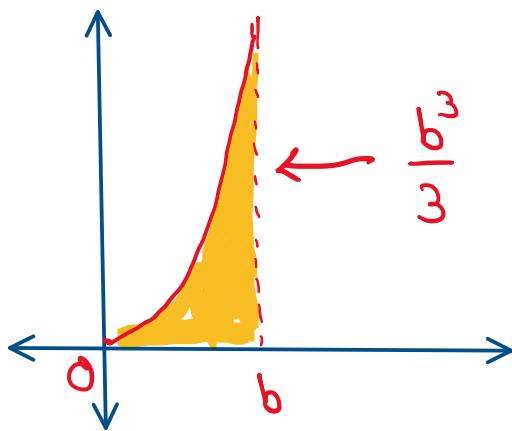
$\therefore F$ es integrable.

Finalmente, como

$$\frac{b^3}{3} \left[1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right] = L(F, P_n) \leq \int_0^b x^2 dx \leq U(F, P_n) = \frac{b^3}{3} \left[1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right]$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{b^3}{3} \leq \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} \Rightarrow \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$



* Ejercicio:

f es integrable en $[a, b]$ si y solo si existe una sucesión $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de particiones de $[a, b]$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0.$$

En este caso,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n).$$

Continuidad y continuidad uniforme.

Definición Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. Decimos que f es continua en x_0 si

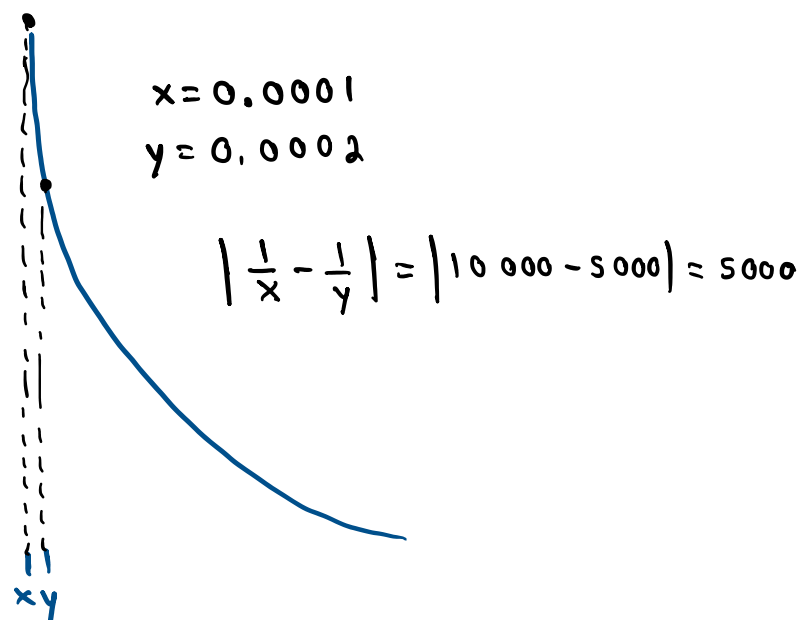
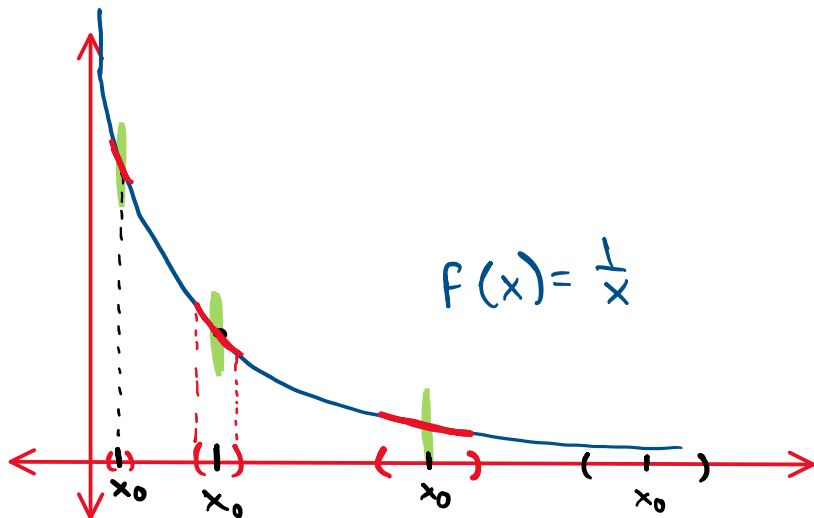
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

(δ depende de x_0)

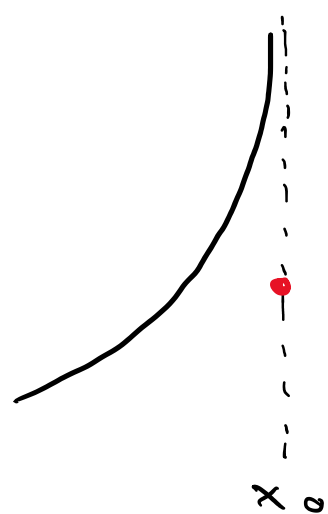
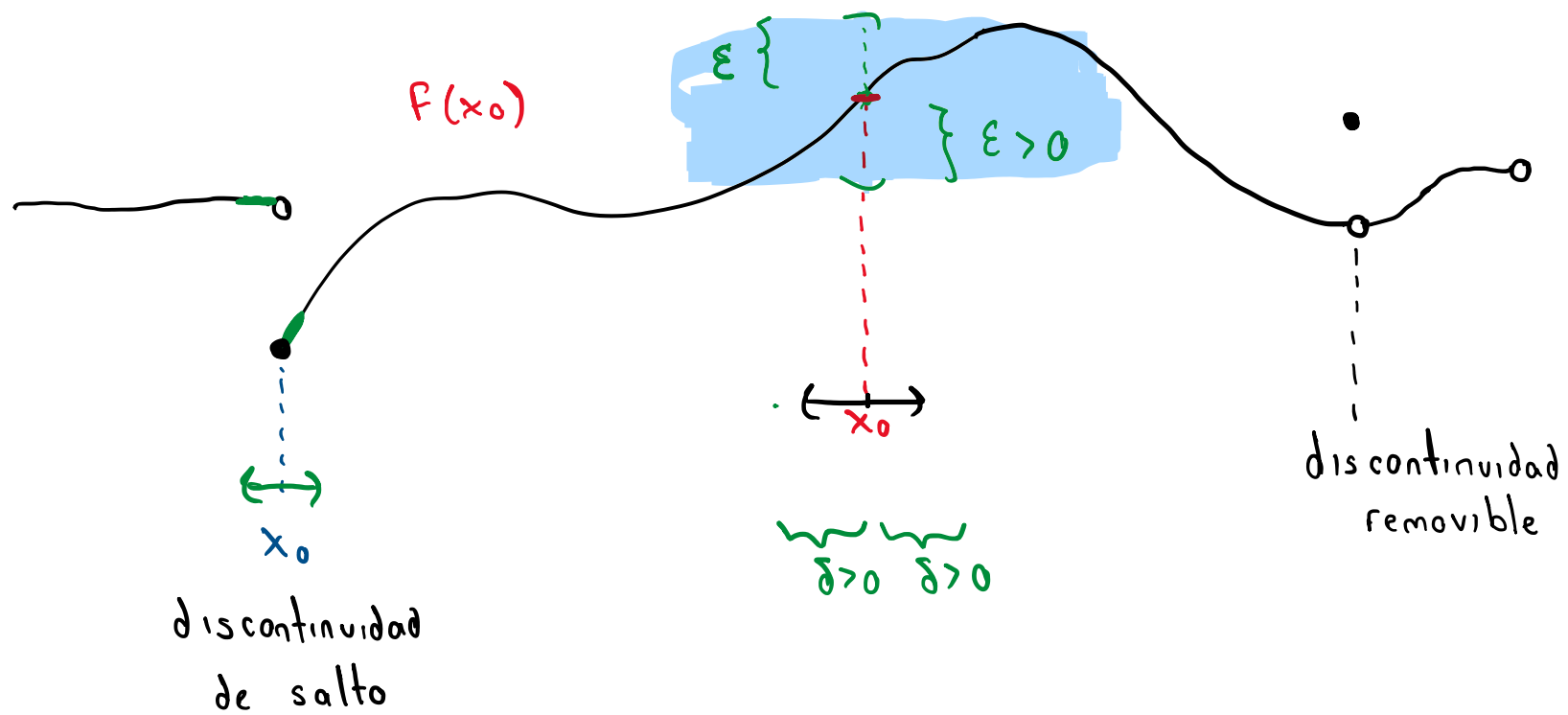
Definición Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es uniformemente continua en A si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A \quad (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

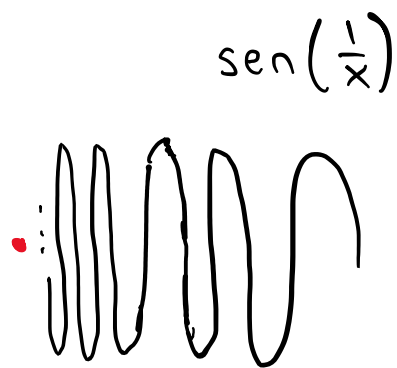
(δ no depende de los puntos x y y)



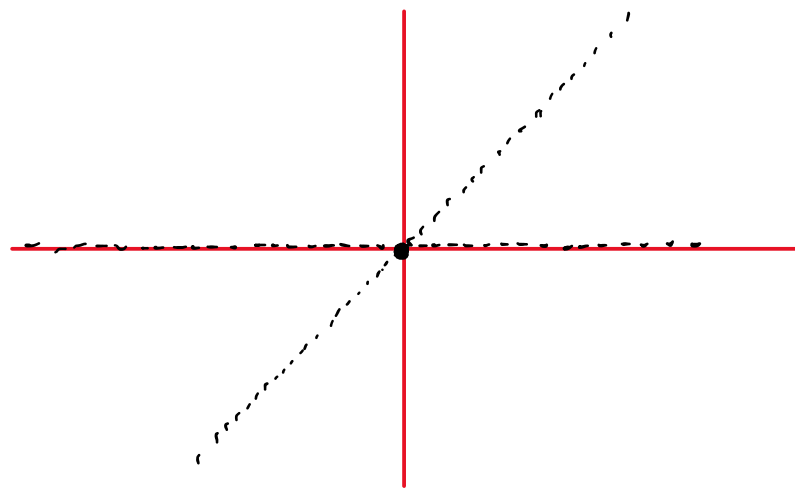
Teorema. Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$.



discontinuidad
"infinita"
(asíntota)



Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



F es continua
únicamente en $x=0$.

Sea $F: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ (Fracción irreducible)} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(Función de Thomae)

F es continua en
 $x \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q}$

