

Definición. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Una partición del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos de $[a, b]$, uno de los cuales es a y otro b .

Los puntos de una partición pueden enumerarse de la forma $t_0, t_1, \dots, t_n$, de manera que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Siempre supondremos que ha sido asignada esta enumeración.

Notación.

$$P = \{t_0, \dots, t_n\}.$$

Definición. Sean $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

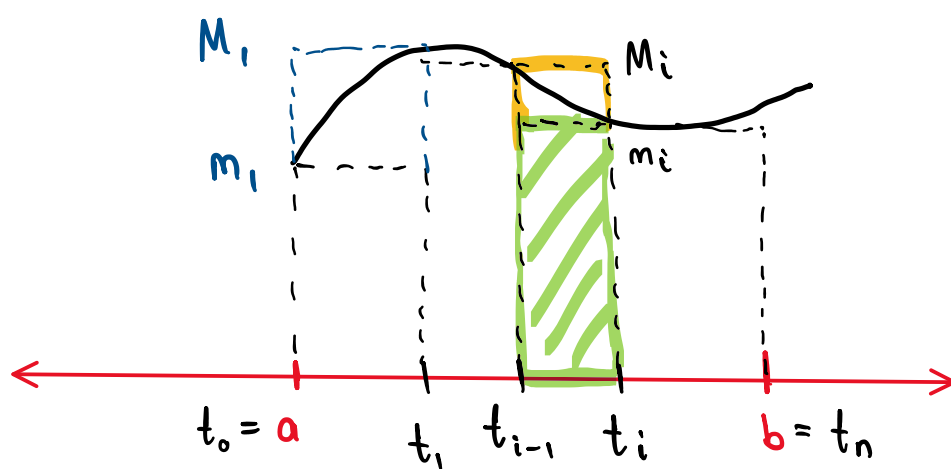
$$m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad \text{y}$$

$$M_i = \sup \{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

La suma inferior de f con respecto a P , representada mediante $L(f, P)$, se define como

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = m_1 (t_1 - t_0) + m_2 (t_2 - t_1) + \dots + m_n (t_n - t_{n-1})$$

Lower



La suma superior de f con respecto a P , representada mediante $U(f, P)$, se define como

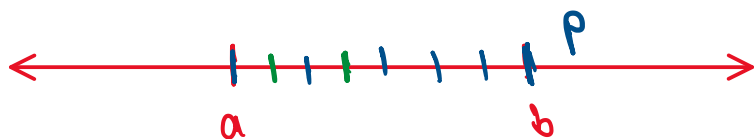
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) = M_1 (t_1 - t_0) + \dots + M_n (t_n - t_{n-1})$$

Upper

Lema. Sean $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y P y Q particiones de $[a, b]$. Si $P \subseteq Q$, entonces

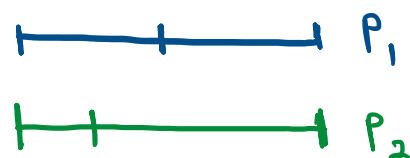
$$\underline{L}(F, P) \leq \underline{L}(F, Q) \leq \underline{U}(F, Q) \leq \underline{U}(F, P).$$

Definición. Sean P y Q particiones de $[a, b]$. Decimos que Q es refinamiento de P o que Q refina a P si $P \subseteq Q$.



Teorema. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si P_1 y P_2 son particiones de $[a, b]$, entonces

$$\underline{L}(F, P_1) \leq \underline{U}(F, P_2).$$



Demostración.

Sea $P = P_1 \cup P_2 \Rightarrow P$ es partición de $[a, b]$ y además $P_1 \subseteq P$ y $P_2 \subseteq P$

Por el lema anterior,

$$\underline{L}(F, P_1) \leq \underline{L}(F, P) \leq \underline{U}(F, P) \leq \underline{U}(F, P_2)$$

$$\Rightarrow \underline{L}(F, P_1) \leq \underline{U}(F, P_2).$$

Observación de ayer.

Definición. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos

- la integral inferior de F en $[a, b]$ como

$$\int_a^b F = \sup \{ \underline{L}(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b] \}$$

- la integral superior de F en $[a, b]$ como

$$\overline{\int_a^b F} = \inf \{ \underline{U}(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b] \}$$

Diremos que F es integrable en $[a, b]$ si

$$\int_a^b F = \overline{\int_a^b F},$$

es decir, si

$$\sup \{L(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b]\} = \inf \{U(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

En este caso, a este número común se le denomina la integral de F en $[a, b]$ y se representa como

$$\int_a^b F.$$

A los números a y b se les conoce como límites de integración.

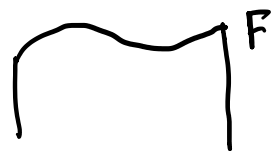
* $\int_a^b F$ es un número real (si F es integrable en $[a, b]$)

$\int_a^b F$ se conoce como integral definida.

Observación. Si F es integrable en $[a, b]$, entonces

$$L(F, P) \leq \int_a^b F \leq U(F, P) \quad \text{para toda partición } P \text{ de } [a, b].$$

* Además, $\int_a^b F$ es el único número con esta propiedad.



Demostración:

Por definición,

$$L(F, P) \leq \underbrace{\int_a^b F}_{\substack{\uparrow \\ \sup \{L(F, P) \mid P \text{ partición de } [a, b]\}}} = \int_a^b F = \overline{\int_a^b F}^{\substack{\leftarrow \\ \inf \{U(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b]\}}} \leq U(F, P)$$

* Veamos que si $I \in \mathbb{R}$ y $L(F, P) \leq I \leq U(F, P)$ para toda partición P de $[a, b]$, entonces $I = \int_a^b F$.

Como I es cota superior de $\{L(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b]\}$

$$\Rightarrow I \geq \sup \{L(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b]\} = \underline{\int_a^b F}$$

Por otro lado, como I es cota inferior de $\{U(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b]\}$

$$\Rightarrow I \leq \inf \{U(F, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b]\} = \int_a^b F$$

$$\Rightarrow \int_a^b F \leq I \leq \int_a^b F$$

Como F es integrable, entonces $\int_a^b F = \int_a^b F = \int_a^b F$

$$\Rightarrow \int_a^b F = \int_a^b F \leq I \leq \int_a^b F = \int_a^b F \Rightarrow I = \int_a^b F.$$

Notación:

$$\mathcal{P}_{[a, b]} := \{P \mid P \text{ es partición de } [a, b]\}$$

Proposición. Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces

$$\int_a^b F \leq \int_a^b F.$$

(no es necesario que F sea integrable).

Demostración (Ejercicio)

Ejemplos.

① Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$).

Consideremos $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$, $P = \{t_0, \dots, t_n\}$

$$\text{Notemos que } m_i = \inf \{F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = c = \sup \{F(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i \\ = \inf \{c\} = \sup \{c\}$$

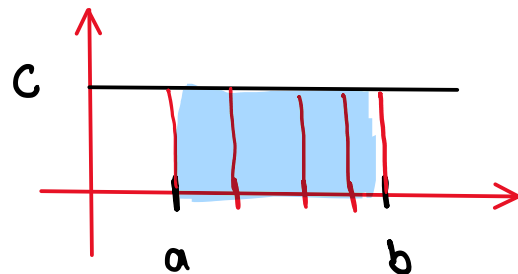
$$\Rightarrow U(F, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n c (t_i - t_{i-1}) = c(t_1 - t_0) + c(t_2 - t_1) + \dots + c(t_n - t_{n-1})$$

$$= c[(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1})]$$

$$= c \underbrace{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}_{\text{suma telescópica}} = c [t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \dots + t_n - t_{n-1}]$$

$$= c [t_n - t_0] = c [b - a]$$



Similarmente,

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c (t_i - t_{i-1}) = c [b - a]$$

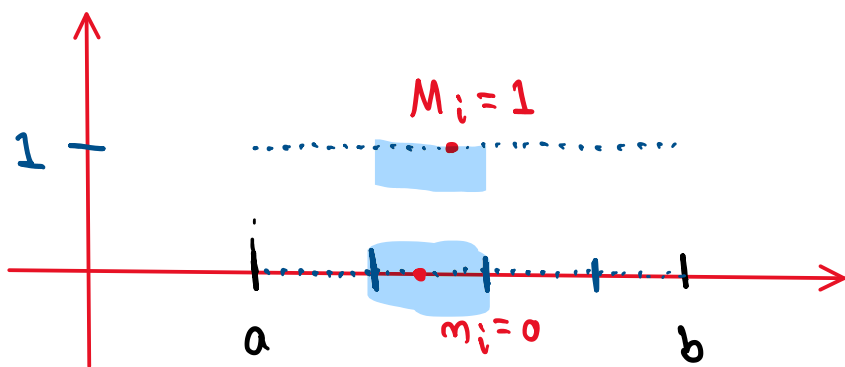
$$\therefore L(f, P) = c(b-a) = U(f, P) \text{ para toda partición } P \text{ de } [a, b].$$

Por lo anterior,

$$\int_a^b f = c(b-a) = \overline{\int_a^b f} \Rightarrow \int_a^b f = c(b-a).$$

② Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



Consideremos $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$, $P = \{t_0, \dots, t_n\}$.

En este caso

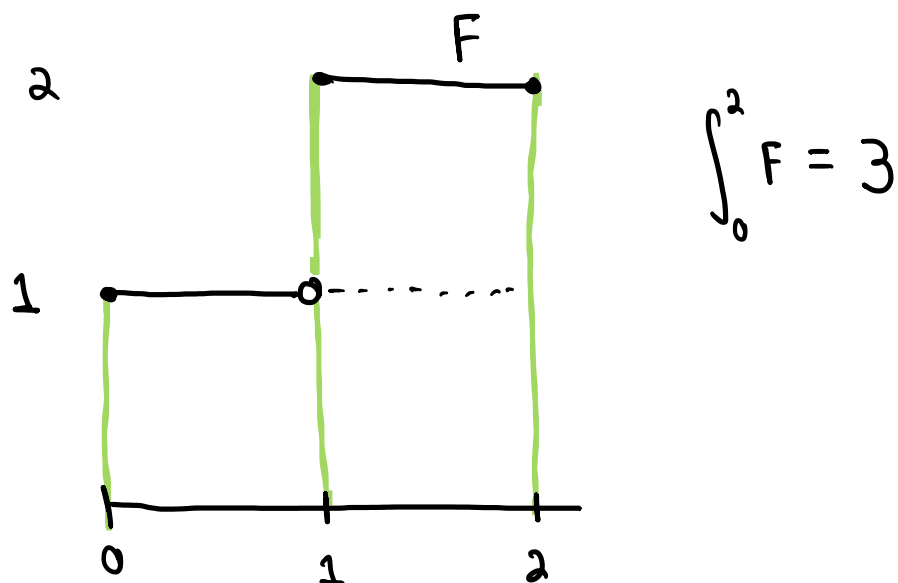
$$m_i = 0 \quad \text{y} \quad M_i = 1 \quad \text{para cada } i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 0 (t_i - t_{i-1}) = 0$$

$$\text{y } U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 1 (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = b - a.$$

$$\Rightarrow \int_a^b F = 0 \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b F} = b-a$$

Como $\int_a^b F \neq \overline{\int_a^b F}$, concluimos que F no es integrable en $[a, b]$



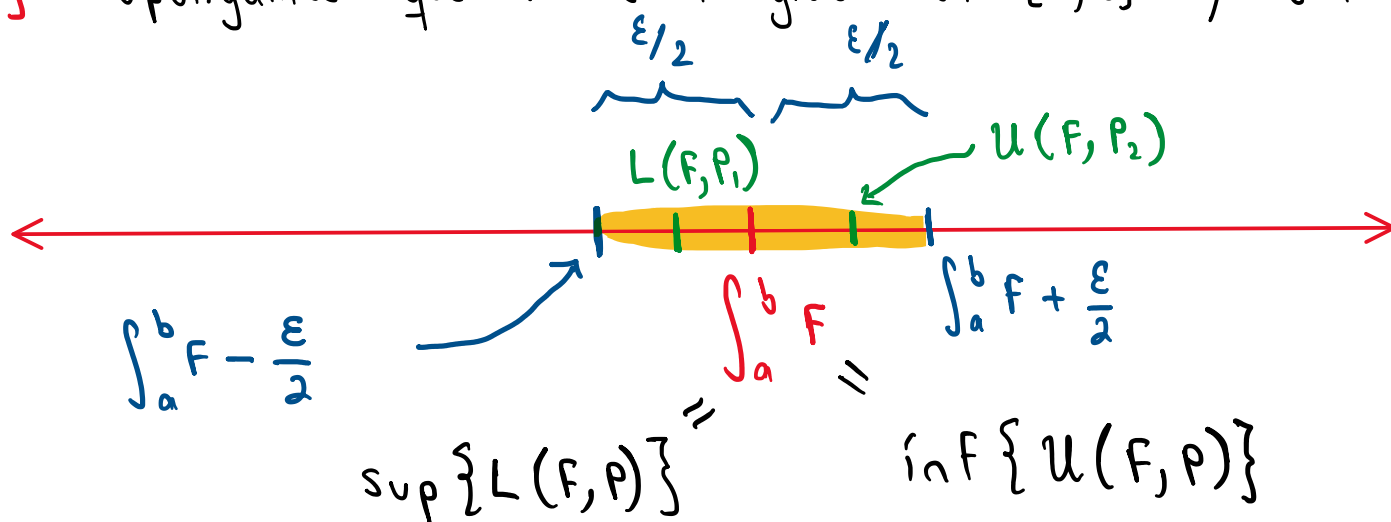
Teorema (criterio de integrabilidad).

Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces F es integrable en $[a, b]$ si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(F, P) - L(F, P) < \varepsilon.$$

Demostración

$\Rightarrow$ Supongamos que F es integrable en $[a, b]$ y sea $\varepsilon > 0$.



Como $\int_a^b F = \sup \{L(F, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a, b]}\}$ y $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$\Rightarrow \int_a^b F - \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota superior de $\{L(F, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a, b]}\}$

$\Rightarrow$ existe $P_1 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que $\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_1)$.

Por otra parte, como

$$\int_a^b f = \inf \{ U(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \} \quad \text{y} \quad \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$\Rightarrow \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota inferior de $\{ U(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \}$

$\Rightarrow$ existe $P_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que $U(f, P_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$

Consideremos $P = P_1 \cup P_2$. Como $P_1 \leq P$ y $P_2 \leq P$, entonces

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < L(f, P) - \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{y} \quad U(f, P) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$] Queremos probar que f es integrable en $[a, b]$, es decir, que

$$\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$$

Mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$:

$$0 \leq \overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} < \varepsilon$$

* Si $a > 0$ y
 $\forall \varepsilon > 0 \quad a < \varepsilon$,
 entonces $a = 0$

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

Además,

$$\overline{\int_a^b f} \leq U(f, P) \quad \text{y}$$

$$\underline{\int_a^b} F \geq L(F, P) \Rightarrow -\underline{\int_a^b} F \leq -L(F, P)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} F - \underline{\int_a^b} F \leq U(F, P) - L(F, P) < \varepsilon \Rightarrow 0 \leq \overline{\int_a^b} F - \underline{\int_a^b} F < \varepsilon$$

Prop.

(*)

$$\therefore \overline{\int_a^b} F - \underline{\int_a^b} F = 0, \text{ es decir, } \overline{\int_a^b} F = \underline{\int_a^b} F.$$

$\therefore F$ es integrable en $[a, b]$.

