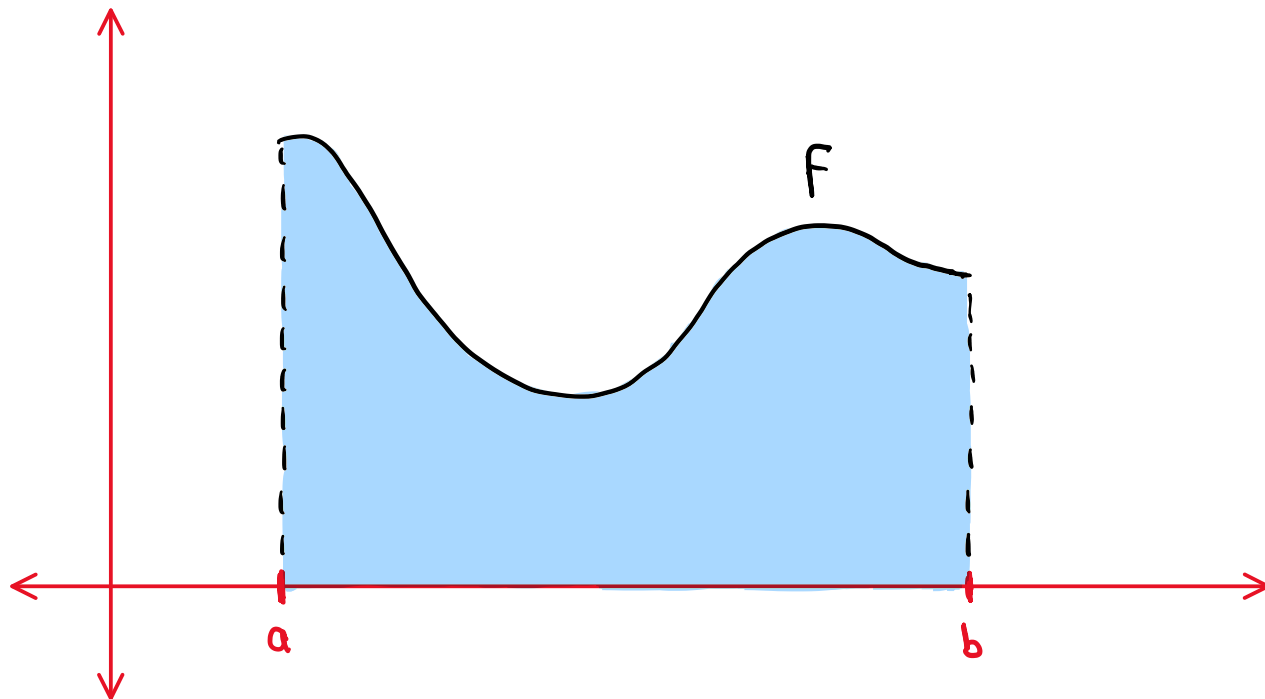


integrales

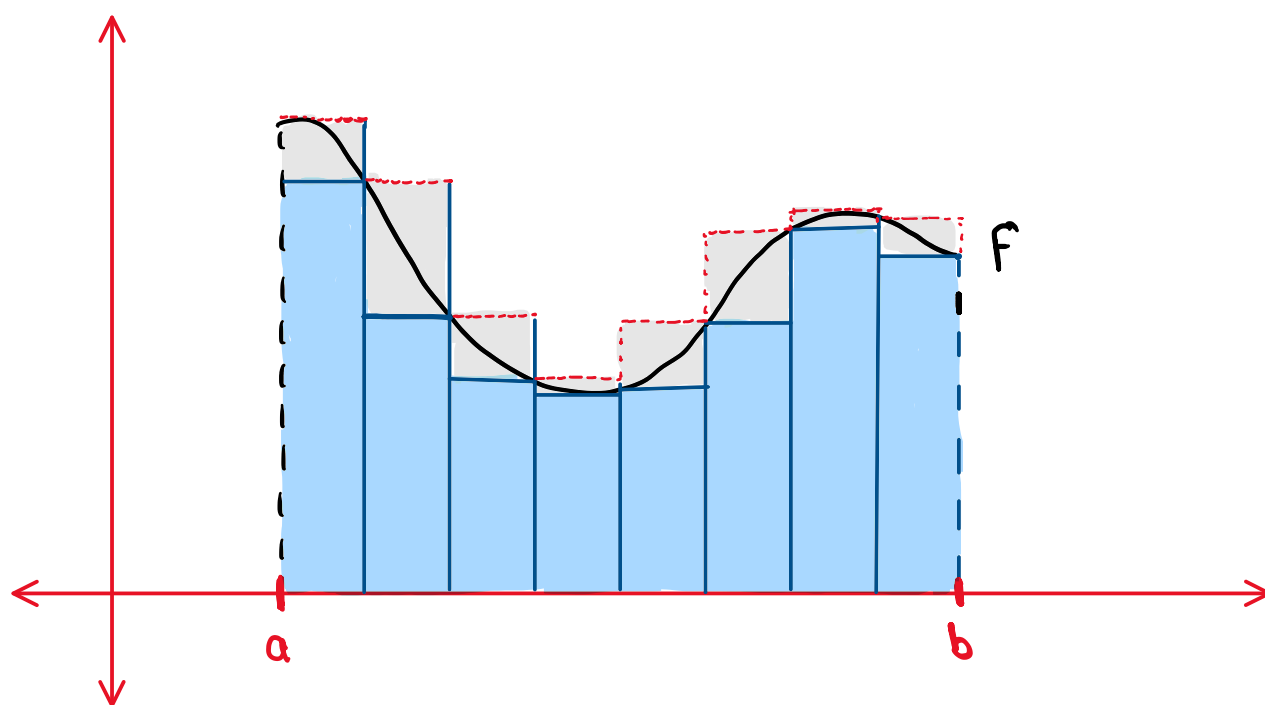
lunes, 14 de febrero de 2022

Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una Función acotada.

Queremos calcular el área de la siguiente región (en caso de ser posible):



Aproximaremos a esta región por medio de rectángulos que se encuentren por debajo o por encima de la gráfica de F .



Recordatorio de Cálculo I:

Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}$

Decimos que A está acotado superiormente si existe $z \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A$ se cumple que $a \leq z$. En este caso, decimos que z es una cota superior de A .

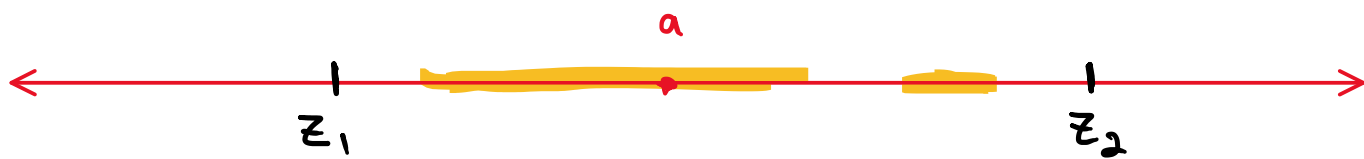


Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}$

Decimos que A está acotado inferiormente si existe $z \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A$ se cumple que $z \leq a$. En este caso, decimos que z es una cota inferior de A .



Definición. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado si está acotado inferiormente y superiormente, es decir, existen $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tales que para toda $a \in A$ se cumple que $z_1 \leq a \leq z_2$.



Equivalentemente,

$A \subset \mathbb{R}$ está acotado si existe $M > 0$ tal que

$$\forall a \in A \quad |a| \leq M$$



$$\forall a \in A \quad -M \leq a \leq M$$

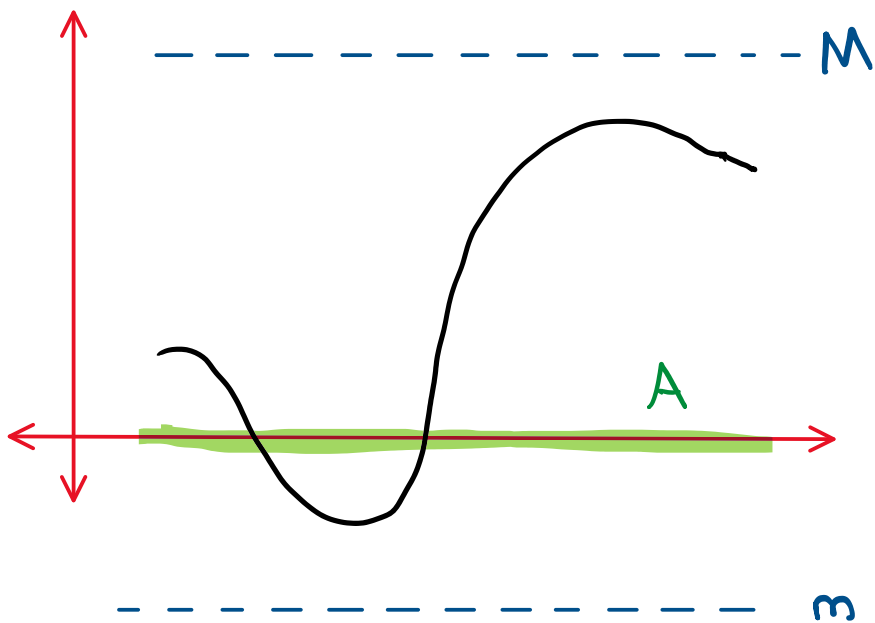


Definición. Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está acotada si existe $M > 0$ tal que

$$\forall x \in A \quad |f(x)| \leq M.$$

Equivalentemente, f está acotada si existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall x \in A \quad m \leq f(x) \leq M.$$



Definición. Sean $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y $\alpha \in \mathbb{R}$.

α es el supremo de A si es la mínima cota superior de A , es decir:

- i) α es cota superior de A
- ii) si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A , entonces $\alpha \leq \beta$.

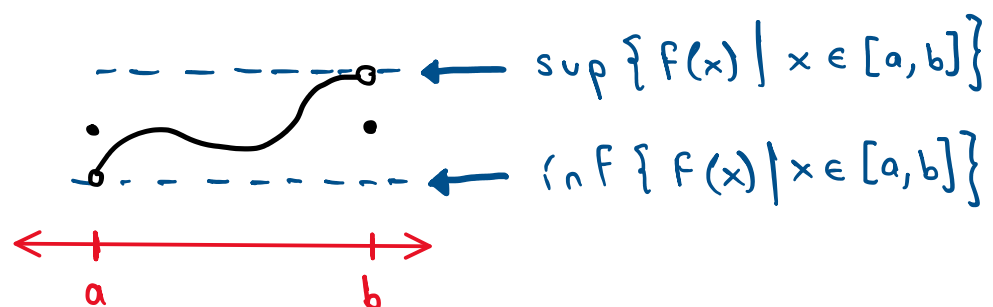
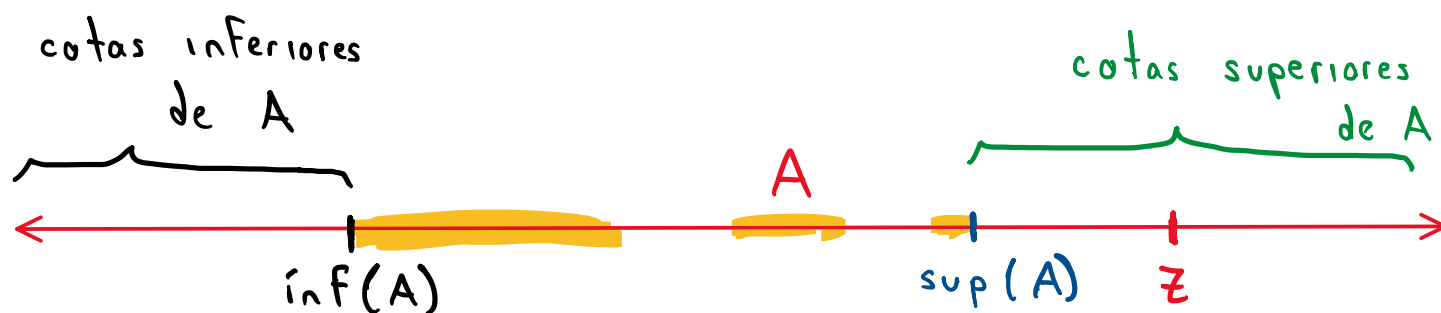
* Notación: $\sup A$ o $\sup(A)$

Definición. Sean $A \subset \mathbb{R}$ acotado inferiormente y $\alpha \in \mathbb{R}$.

α es el ínfimo de A si es la máxima cota inferior de A , es decir:

- i) α es cota inferior de A
- ii) si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A , entonces $\beta \leq \alpha$.

* Notación: $\inf A$ o $\inf(A)$



Axioma del supremo

Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Definición. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A tiene elemento máximo si existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que

- 1) $a_0 \in A$
- 2) $\forall a \in A \quad a \leq a_0$ (a_0 es cota superior de A)

(a_0 es una cota superior de A que pertenece a A).

Definición. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A tiene elemento mínimo si existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que

- 1) $a_0 \in A$
- 2) $\forall a \in A \quad a_0 \leq a$ (a_0 es cota inferior de A)

(a_0 es una cota inferior de A que pertenece a A).

Teorema. Si F es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad F(x) \leq F(c)$. (Toda Función continua en un intervalo cerrado "alcanza su valor máximo" en dicho intervalo).

Corolario Si F es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad F(c) \leq F(x)$. (Toda Función continua en un intervalo cerrado "alcanza su valor mínimo" en dicho intervalo).

Regresando a Cálculo II:

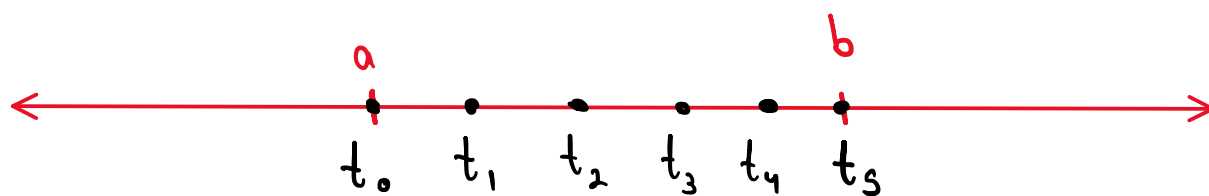
Definición. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Una **partición** del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos de $[a, b]$, uno de los cuales es a y otro b .

Los puntos de una partición pueden enumerarse de la forma $t_0, t_1, \dots, t_n$, de manera que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Siempre supondremos que ha sido asignada esta enumeración.

Notación. $P = \{t_0, \dots, t_n\}$.



Ejemplos:

$\{0, 1\}$ es partición de $[0, 1]$

$\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ es partición de $[0, 1]$

$\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ no es partición de $[0, 1]$
(por ser un conjunto infinito).

Definición. Sean $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

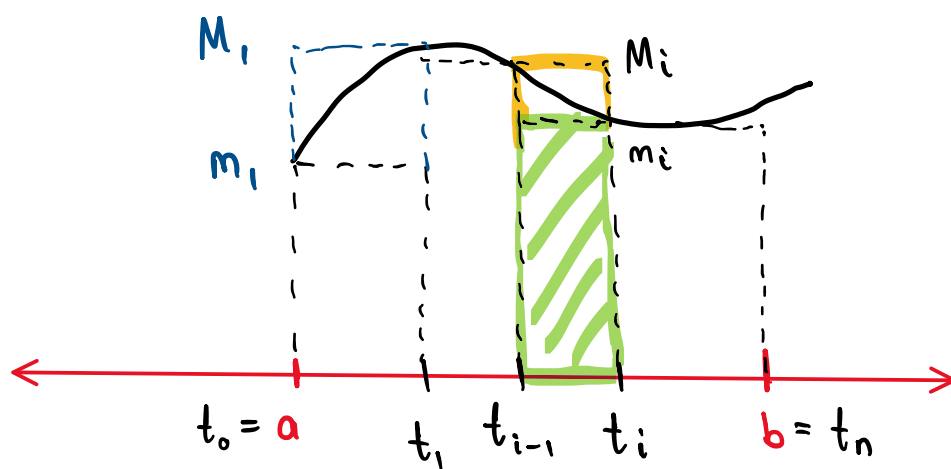
$$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \} \quad \text{y}$$

$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}.$$

La suma inferior de f con respecto a P , representada mediante $L(f, P)$, se define como

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = m_1 (t_1 - t_0) + m_2 (t_2 - t_1) + \dots + m_n (t_n - t_{n-1})$$

Lower



La suma superior de f con respecto a P , representada mediante $U(f, P)$, se define como

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}) = M_1 (t_1 - t_0) + \dots + M_n (t_n - t_{n-1})$$

Upper

Observación: Para cualquier partición P se cumple que

$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

Demostración:

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $m_i \leq M_i$

$$\Rightarrow m_i (t_i - t_{i-1}) \leq M_i (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow L(f, P) \leq U(f, P).$$

Lema. Sean $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y P y Q dos particiones de $[a,b]$. Si $P \subseteq Q$, entonces

$$\underline{L(f, P)} \leq \underline{L(f, Q)} \leq \underline{U(f, Q)} \leq \underline{U(f, P)}$$

Demostración.

Consideremos el caso en el que Q tiene exactamente un punto más que P . Digamos que

$$P = \{t_0, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n\}$$

$$\text{y } Q = \{t_0, \dots, t_{k-1}, u, t_k, \dots, t_n\}. \quad (k \in \{1, \dots, n\})$$

$$\text{Sean } m' = \inf \{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, u]\} \\ \text{y } m'' = \inf \{f(x) \mid x \in [u, t_k]\}$$

Entonces

$$L(f, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i (t_i - t_{i-1}) + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^n m_i (t_i - t_{i-1})$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i (t_i - t_{i-1}) + m_k (t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i (t_i - t_{i-1})$$

Basta probar que $m_k (t_k - t_{k-1}) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u)$.

Como $m_k = \inf \{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, t_k]\}$,

$$\Rightarrow \forall x \in [t_{k-1}, t_k] \quad m_k \leq f(x)$$

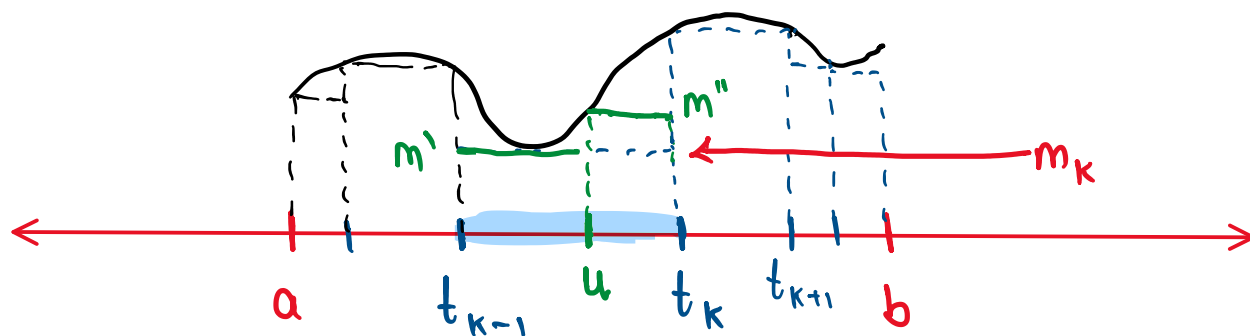
$\Rightarrow m_k$ es cota inferior de $\{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, u]\}$ y $\{f(x) \mid x \in [u, t_k]\}$

$$\Rightarrow m_k \leq m' \quad \text{y} \quad m_k \leq m''$$

$$\Rightarrow m_k (u - t_{k-1}) \leq m' (u - t_{k-1}) \quad \text{y} \quad m_k (t_k - u) \leq m'' (t_k - u)$$

$$\Rightarrow \underline{m_k (t_k - t_{k-1})} = m_k (u - t_{k-1}) + m_k (t_k - u) \leq \underline{m' (u - t_{k-1}) + m'' (t_k - u)}$$

$\therefore L(f, P) \leq L(f, Q)$ si Q tiene un punto más que P .



* Análogamente se prueba que $\mathcal{U}(F, P) \geq \mathcal{U}(F, Q)$:

Sean

$$M' = \sup \{ f(x) \mid x \in [t_{k-1}, u] \}$$

$$\text{y } M'' = \sup \{ f(x) \mid x \in [u, t_k] \}$$

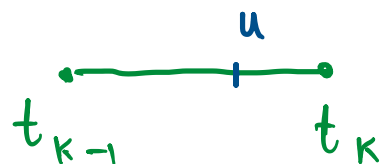
Entonces

$$\mathcal{U}(F, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i (t_i - t_{i-1}) + M' (u - t_{k-1}) + M'' (t_k - u) + \sum_{i=k+1}^n M_i (t_i - t_{i-1})$$

$$\mathcal{U}(F, P) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i (t_i - t_{i-1}) + M_k (t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n M_i (t_i - t_{i-1})$$

Basta probar que $M_k (t_k - t_{k-1}) \geq M' (u - t_{k-1}) + M'' (t_k - u)$.

Como $M_k = \sup \{ f(x) \mid x \in [t_{k-1}, t_k] \}$,



$$\Rightarrow \forall x \in [t_{k-1}, t_k] \quad f(x) \leq M_k$$

$\Rightarrow M_k$ es cota superior de $\{ f(x) \mid x \in [t_{k-1}, u] \}$ y $\{ f(x) \mid x \in [u, t_k] \}$

$$\Rightarrow M' \leq M_k \quad \text{y} \quad M'' \leq M_k$$

$$\Rightarrow M_k (u - t_{k-1}) \geq M' (u - t_{k-1}) \quad \text{y} \quad M_k (t_k - u) \geq M'' (t_k - u)$$

$$\Rightarrow \underline{M_k (t_k - t_{k-1})} = M_k (u - t_{k-1}) + M_k (t_k - u) \geq \underline{M' (u - t_{k-1}) + M'' (t_k - u)}$$

$\therefore \mathcal{U}(F, P) \geq \mathcal{U}(F, Q)$ si Q tiene un punto más que P .

Finalmente, si $P \subseteq Q$ y Q tiene k puntos más que P , podemos considerar una sucesión de particiones

$$P = P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_k = Q$$

donde P_j tiene un punto más que P_{j-1} ($j \in \{1, \dots, k\}$)

$$\Rightarrow L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq \dots \leq L(f, Q)$$

$$\text{y } U(f, P) \geq U(f, P_1) \geq \dots \geq U(f, Q)$$

$$\therefore L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P).$$