

## Optimización e interpretación física de la derivada

martes, 25 de enero de 2022

**Ejercicio.** La diferencia entre dos números es igual a 10. Escoja los números de manera que su producto sea mínimo.

**Sol.** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  t. q.  $y - x = 10$   
 $\Rightarrow y = x + 10$

Definimos  $f(x) = xy = x(x + 10) = x^2 + 10x$

Notemos que  $f$  es continua y dos veces derivable en  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2 + 10x)' = 2x + 10$$

$$f''(x) = (2x + 10)' = 2$$

Luego,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -5$$

$\Rightarrow x = -5$  es un punto crítico de  $f$

$$\Rightarrow f''(-5) = 2 > 0$$

$\therefore x = -5$  es un mínimo (local) de  $f$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Finalmente  $y = x + 10 = (-5) + 10$

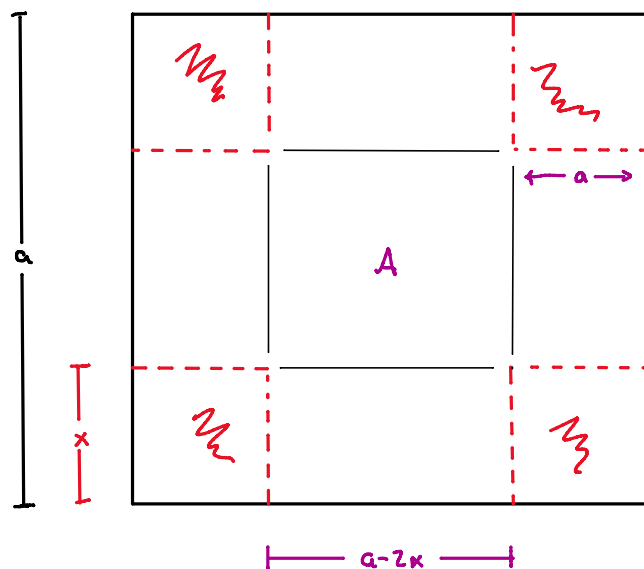
$$\Rightarrow y = 5$$

$\therefore 5$  y  $-5$  son tales que  $5 - (-5) = 10$  y su producto es mínimo.

**Ejercicio.** De una hoja de lados  $a > 0$  se desea hacer una caja rectangular abierta con el mayor volumen posible; para ello se recortan cuadrados iguales en las esquinas de la hoja, doblando hacia arriba las

cuadrados iguales en las esquinas de la hoja, doblando hacia arriba las hojas resultantes. ¿Cuál es la longitud de los lados de los cuadrados recortados para obtener la caja deseada?

**Sol** Sea  $x \in (0, \frac{a}{2})$  la longitud de los cuadrados a recortar ( $x > 0$  por ser una longitud positiva y  $x < \frac{a}{2}$  porque de lo contrario no quedaría material al retirar los cuatro cuadrados).



Así, la caja formada tendrá por base el cuadrado A y altura a.

Así, el volumen de la caja está dado por

$$V(x) = (a-2x)^2 \cdot x = (a^2 - 4ax + 4x^2) x$$

$$\Rightarrow V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

Notemos que la función  $V$  es dos veces derivable en  $(0, \frac{a}{2})$

$$\Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$$

$$V''(x) = 24x - 8a$$

Calculando los puntos críticos:

$$V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-8a) \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4(12)(a^2)}}{2(12)}$$

$$= \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24}$$

$$= \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24}$$

$$= \frac{2a \pm a}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a + a}{6} = \frac{a}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{2a - a}{6} = \frac{a}{6}$$

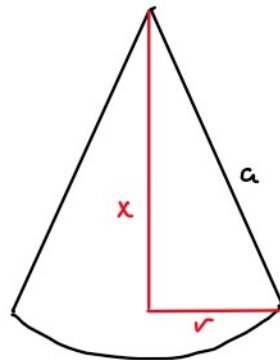
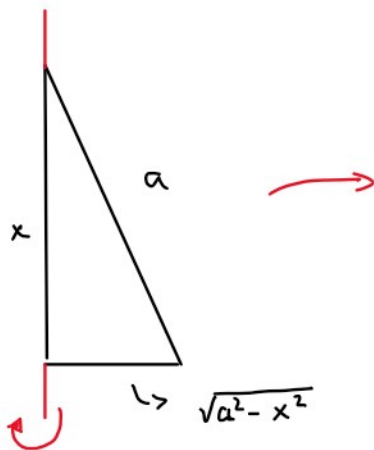
Notemos que  $\frac{a}{6} \in (0, \frac{a}{2})$  y

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = 24\left(\frac{a}{6}\right) - 8a = 4a - 8a = -4a < 0$$

$\Rightarrow \frac{a}{6}$  es un punto máximo de  $V$  en  $(0, \frac{a}{2})$

- Las cuadradas a recortar deben de tener lados de longitud  $\frac{a}{6}$  para construir la caja de volumen máximo

**Ejercicio.** Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud  $a > 0$ , se hace girar al rededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono creado de esta forma?



$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

**Sol.** Supongamos que hacemos girar respecto al cateto de longitud  $x$ .

Así, el cono de revolución tiene altura  $x$  y el radio de su base es la longitud del otro cateto del triángulo, que por Pitágoras es  $\sqrt{a^2 - x^2}$

Entonces el volumen del cono es

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{3} \pi \cdot x \cdot (\sqrt{a^2 - x^2})^2 \\ &= \frac{1}{3} \pi x (a^2 - x^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{3} a^2 \pi x - \frac{1}{3} \pi x^3$$

Notamos que esta función es dos veces derivable en  $(0, a)$

( $x < a$  pues  $x$  es un cateto y  $a$  la hipotenusa)

$$\Rightarrow V'(x) = \frac{1}{3} a^2 \pi - \pi x^2 \quad y$$

$$V''(x) = -2\pi x$$

Encontrando las puntos críticas:

$$V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} a^2 \pi - \pi x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\pi} x^2 = \frac{1}{3} a^2 \cancel{\pi}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \circ \quad x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Notamos que  $\frac{a}{\sqrt{3}} \in (0, a)$  y

$$V''\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -2\pi \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

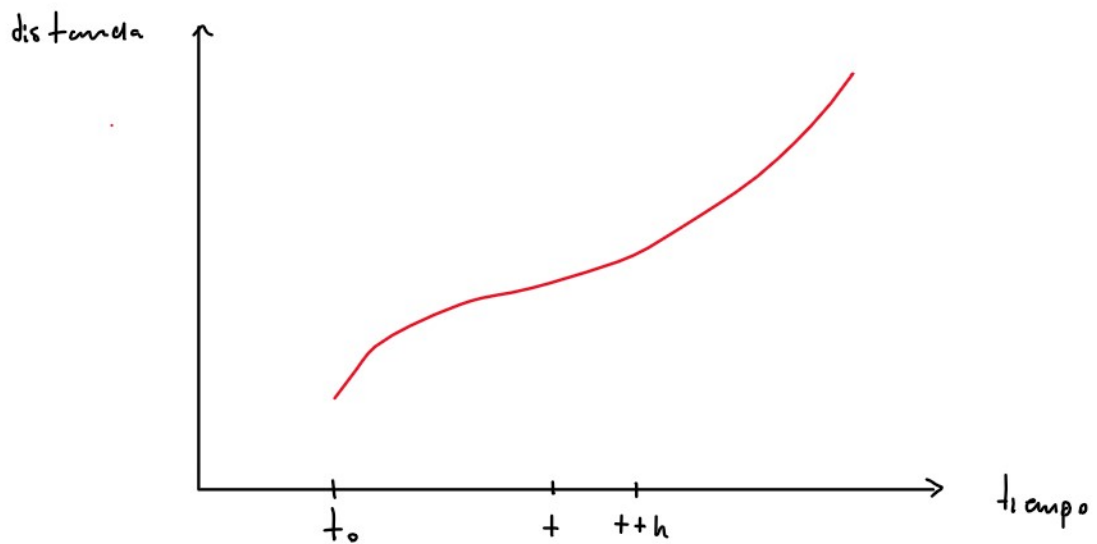
$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ es máximo de } V \text{ en } (0, a)$$

$\therefore$  El volumen máximo que puede del cono es de

$$\begin{aligned} V\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{a^2 \pi}{3} \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 \\ &= \frac{a^2 \pi}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2a^2 \pi}{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

## Interpretación física de la derivada

Consideremos un objeto A que comienza a moverse en un tiempo  $t_0$  y sea  $f(t)$  la distancia que ha recorrido A en el tiempo  $t > t_0$



La velocidad promedio del objeto A en el intervalo de tiempo  $[t, t+h]$  es

$$\frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t+h) - f(t)}{\cancel{t+h} - \cancel{t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}$$

describe la **velocidad instantánea** del objeto A en el tiempo  $t$ .

Similarmente

$$\boxed{f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t+h) - f'(t)}{h}}$$

describe la **aceleración instantánea** de A en el tiempo  $t$ .

**Ejercicio.** Una pelota se deja caer de una altura de 250 metros, y la altura de la pelota al suelo en el tiempo  $t$  está dada por la función

$$f(t) = 250 - \frac{49}{100} t^2$$

¿En que tiempo (segundos) la pelota toca el suelo, y cuál es su velocidad y aceleración en ese instante?

**Sol.** Notamos que  $f(0) = 250$ , es decir, la pelota se deja caer en  $t=0$ .

Ahora bien, como  $f(t)$  es la altura desde el suelo a la pelota al tiempo  $t$ , entonces la altura toca al suelo si

$$f(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 250 - \frac{49}{100} t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{49}{100} t^2 = 250$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 250 \cdot 100 \cdot \frac{1}{49} = (5^2 \cdot 10) \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{7^2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5 \cdot 10}{7} \sqrt{10} \quad \text{o} \quad t = - \frac{5 \cdot 10}{7} \sqrt{10}$$

Estamos considerando los tiempos después de que se saltó la pelota, es decir,  $t > 0$ .

$$\Rightarrow \frac{50}{7} \sqrt{10} > 0 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{50}{7} \sqrt{10}\right) = 0$$

$\Rightarrow$  La pelota toca el suelo en el tiempo  $\frac{50}{7} \sqrt{10}$ .

Luego, notamos que  $f$  es dos veces derivable en  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(t) = \left(250 - \frac{49}{100} t^2\right)' = - \frac{49}{50} t \quad \text{y}$$

$$f''(t) = - \frac{49}{50}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{80}{7}\sqrt{10}\right) = -7\sqrt{10} \quad , \quad f''(t) = -\frac{49}{80}$$

$\therefore$  La pelota alcanza una velocidad de  $-7\sqrt{10}$  ( $\frac{m}{s}$ )  
y una aceleración de  $-\frac{49}{80}$  ( $\frac{m}{s^2}$ ) cuando toca el suelo.

**Ejercicio.** La altura con respecto al suelo de un objeto que se desplaza verticalmente está dada por

$$f(t) = -16t^2 + 96t + 112$$

con  $t$  en segundos y  $f(t)$  en metros. Determina la velocidad y aceleración del objeto en  $t=0$ , su altura máxima y cuando la alcanza.

**Sol.** Notamos que  $f$  es dos veces derivable en  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(t) = -32t + 96 \quad , \quad f''(t) = -32$$

$$\Rightarrow f'(0) = 96 \quad , \quad f''(0) = -32$$

$\therefore$  La velocidad del objeto en  $t=0$  es de  $96$   $\frac{m}{s}$   
y su aceleración es de  $-32$   $\frac{m}{s^2}$ .

Luego, el objeto alcanza su altura máxima en  $t$  si

$$f'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -32t + 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow 32t = 96$$

$$\Leftrightarrow t = 3$$

$\Rightarrow t$  es un punto crítico de  $f$ .

Luego,  $f''(3) = -32 < 0$

$\Rightarrow t=3$  es máximo de  $f$

$\therefore f$  alcanza su altura máxima a las 3 segundos,  
y esta altura es de

$$f(3) = -16(3)^2 + 96(3) + 112 = 256 \text{ metros.}$$