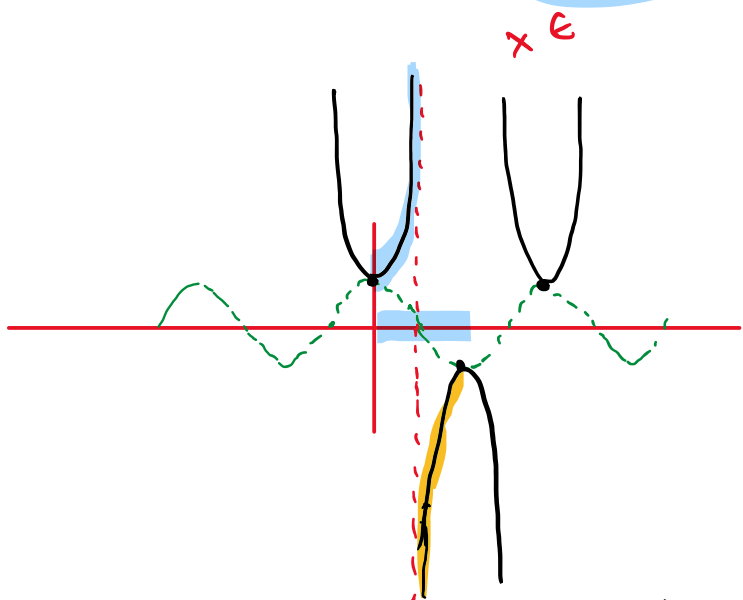


$$\sec: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$\sec^{-1}: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



Calcularemos $(\sec^{-1})'(x)$.

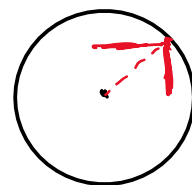
Identidades Pitagóricas:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



$$\tan x = \pm \sqrt{\sec^2 x - 1}$$

$$(\sec^{-1})'(x) = \frac{1}{\sec'(\sec^{-1}(x))}$$

$$\tan(\sec^{-1}(x)) = \pm \sqrt{\sec^2(\sec^{-1}(x)) - 1}$$

depende del signo de $\tan$

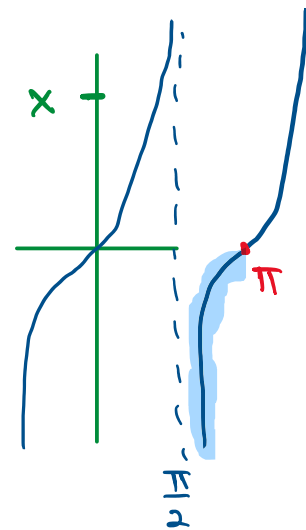
$$= \frac{1}{\sec(\sec^{-1}(x)) \tan(\sec^{-1}(x))}$$

$$\sec'(x) = \sec(x) \tan(x)$$

$$= \frac{1}{x \sqrt{\sec^2(\sec^{-1}(x)) - 1}}$$

$$x \in (1, \infty)$$

$$\theta = \sec^{-1}(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\Rightarrow (\sec^{-1})'(x) = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}, \quad x \in [1, \infty)$$

$$\begin{aligned} * \sec^2(\sec^{-1}(x)) &= [\sec(\sec^{-1}(x))]^2 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{si } x \in [1, \infty) &\Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Rightarrow \tan \theta \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{si } x \in (-\infty, -1] &\Rightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ &\Rightarrow \tan \theta \leq 0 \end{aligned}$$

Si $F(0) = 5$ y $F'(x) \geq 2$ para toda $x \in [0, 10]$

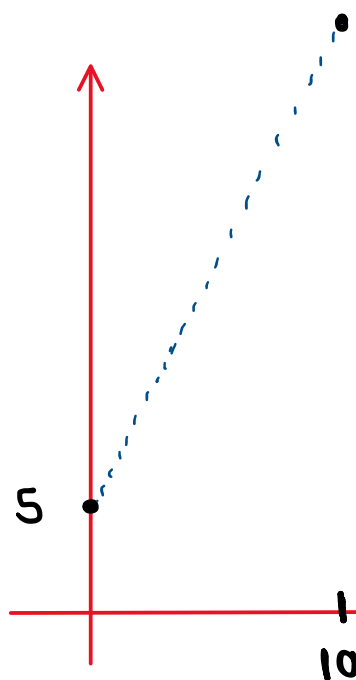
¿Qué podemos decir de $F(10)$?

* Si $F'(x) \geq 2$, entonces la función debe crecer a velocidad mayor o igual a 2 en el intervalo $[0, 10]$
 $\Rightarrow F(10) \geq F(0) + 2(10) = 25$

P.D. $F(10) \geq 25$

Como F es continua en $[0, 10]$ y derivable en $(0, 10)$, existe $c \in (0, 10)$ tal que

$$2 \leq F'(c) = \frac{F(10) - F(0)}{10 - 0} = \frac{F(10) - F(0)}{10}$$



$$\Rightarrow 20 \leq F(10) - F(0)$$

$$\Rightarrow F(0) + 20 \leq F(10)$$

$$\therefore 25 \leq F(10)$$

Supongamos ahora que $F(1) = y_0$ y $-1 \leq F'(x) \leq 2$ para toda $x \in [1, 6]$

$$\Rightarrow y_0 - 5 \leq F(6) \leq y_0 + 10$$

$$-1 \leq F'(x) \leq 2$$

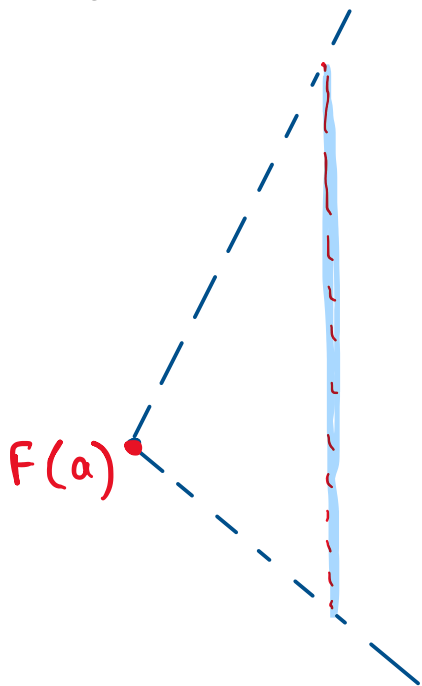
Por el T.V.M. aplicado al intervalo $[1, 6]$, existe $c \in (1, 6)$ t.q.

$$-1 \leq F'(c) = \frac{F(6) - F(1)}{6 - 1} \leq 2$$

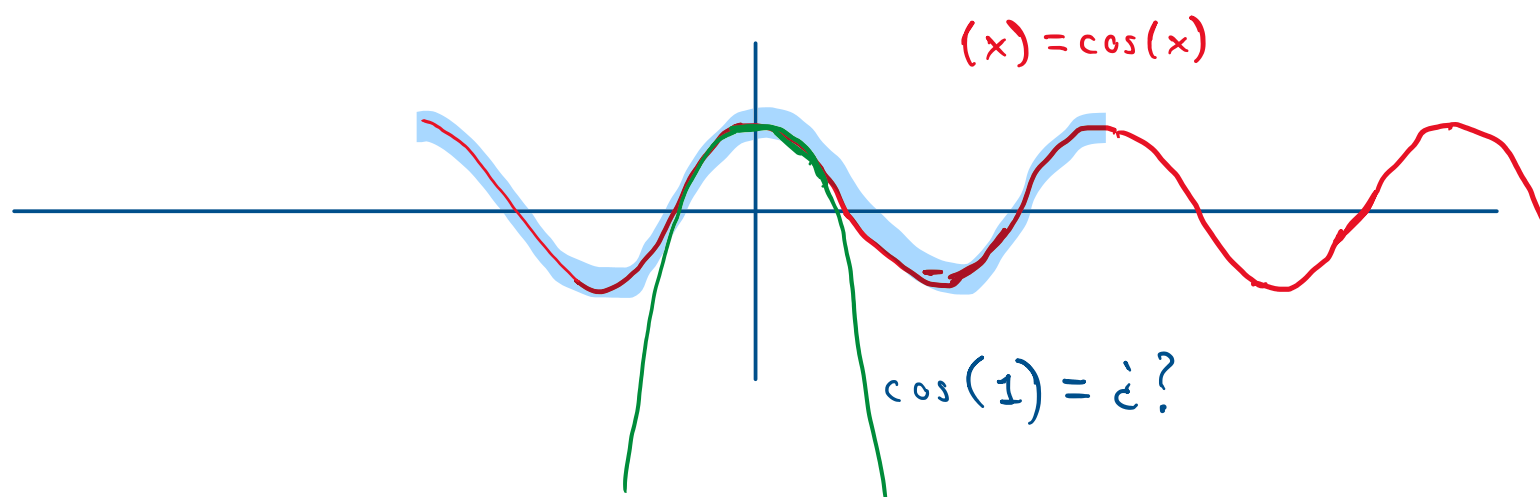
$$\Rightarrow -1 \leq \frac{F(6) - y_0}{5} \leq 2$$

$$\Rightarrow -5 \leq F(6) - y_0 \leq 10$$

$$\Rightarrow y_0 - 5 \leq F(6) \leq y_0 + 10$$



Dada una función F (continua, derivable, etc.), ¿puedo aproximar a la función F por medio de un polinomio?



Polinomios de Taylor (introducción)

Sea $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ una función polinómica de grado n .

$$\Rightarrow F(0) = a_0$$

$$F'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} \Rightarrow F'(0) = a_1$$

$$F''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} \Rightarrow F''(0) = 2a_2$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{F^{(0)}(0)}{0!}$$

$$F^{(3)}(0) = 6a_3$$

$$a_1 = \frac{F^{(1)}(0)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{F^{(2)}(0)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{F^{(3)}(0)}{3!}$$

En general,

$$a_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}$$

- Dada $a \in \mathbb{R}$, si $F(x)$ es un polinomio de grado n , entonces $F(x)$ puede ser expresado de la siguiente forma:

$$F(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n \quad \odot$$

$$= a_0 + (a_1 + a_2(x-a) + \dots + a_n(x-a)^{n-1})(x-a)$$

En este caso, decimos que F es un polinomio en $x-a$ o alrededor de a .

* Para obtener $\odot$, basta dividir entre $x-a$ y considerar los residuos

Ejemplo: $F(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 8$

$a = 1$

* División sintética $\div (x-1)$

$$F(x) = -7 + 4(x-1) + 7(x-1)^2 + 4(x-1)^3$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - x + 1 \\ x-1 \overline{) 4x^3 - 5x^2 + 2x - 8} \\ \underline{-4x^3 + 4x^2} \\ -x^2 + 2x - 8 \\ \underline{x^2 - x} \\ -x - 8 \\ \underline{-x + 1} \\ -7 \text{ residuo} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & -5 & 2 & -8 & \\ \downarrow & & & & \\ 4 & -1 & 1 & -7 & 1 \\ \hline & 4 & 3 & 1 & \\ \hline & 4 & 3 & 4 & \\ \hline & 4 & 7 & & \end{array}$$

cambiar signo

residuo

* Al dividir entre $x \pm a$ (con $a \in \mathbb{R}$), podemos utilizar división sintética.

$$F(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n$$

En este caso,

$$F'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1}$$

$$F(a) = a_0$$

$$F'(a) = a_1$$

$$F''(a) = 2a_2$$

$$F^{(3)}(a) = 6a_3$$

Nuevamente ocurre que

$$a_k = \frac{F^{(k)}(a)}{k!}$$

Definición. Sean F una Función y $a \in \text{Dom}(F)$, Si $F^{(n)}(a)$ existe (y, por tanto, $F^{(0)}(a), F^{(1)}(a), \dots, F^{(n)}(a)$ existen), definimos el Polinomio de Taylor de grado n de F alrededor de a como

$$P_{n,a,F}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n,$$

donde

$$a_k = \frac{F^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{para cada } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Ejemplo: Calcularemos el Polinomio de Taylor de grado 8 de $\cos x$ alrededor de $a=0$,

$$\text{Si } F(x) = \cos x = F^{(4)}(x)$$

$$F'(x) = -\sin x = F^{(5)}(x)$$

$$F''(x) = -\cos x = F^{(6)}(x)$$

$$F^{(3)}(x) = \sin x = F^{(7)}(x)$$

$$F(0) = F^{(4)}(0) = 1 = F^{(8)}(0)$$

$$F'(0) = F^{(5)}(0) = 0$$

$$F''(0) = F^{(6)}(0) = -1$$

$$F^{(3)}(0) = F^{(7)}(0) = 0$$

$$P_{8,a=0,\cos}(x) = \frac{F^{(0)}(0)}{0!} + \frac{F^{(1)}(0)}{1!}(x-0) + \frac{F^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{F^{(8)}(0)}{8!}(x-0)^8$$

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 = \sum_{n=0}^4 \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

¿Qué pasa si consideramos

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{Serie de Taylor}$$

El polinomio de Taylor de $\sin(x)$ de grado 9 alrededor de $a=0$ es:

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

$$e^x \longrightarrow P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Gráfica de polinomios de Taylor de $F(x) = \text{sen}(x)$

